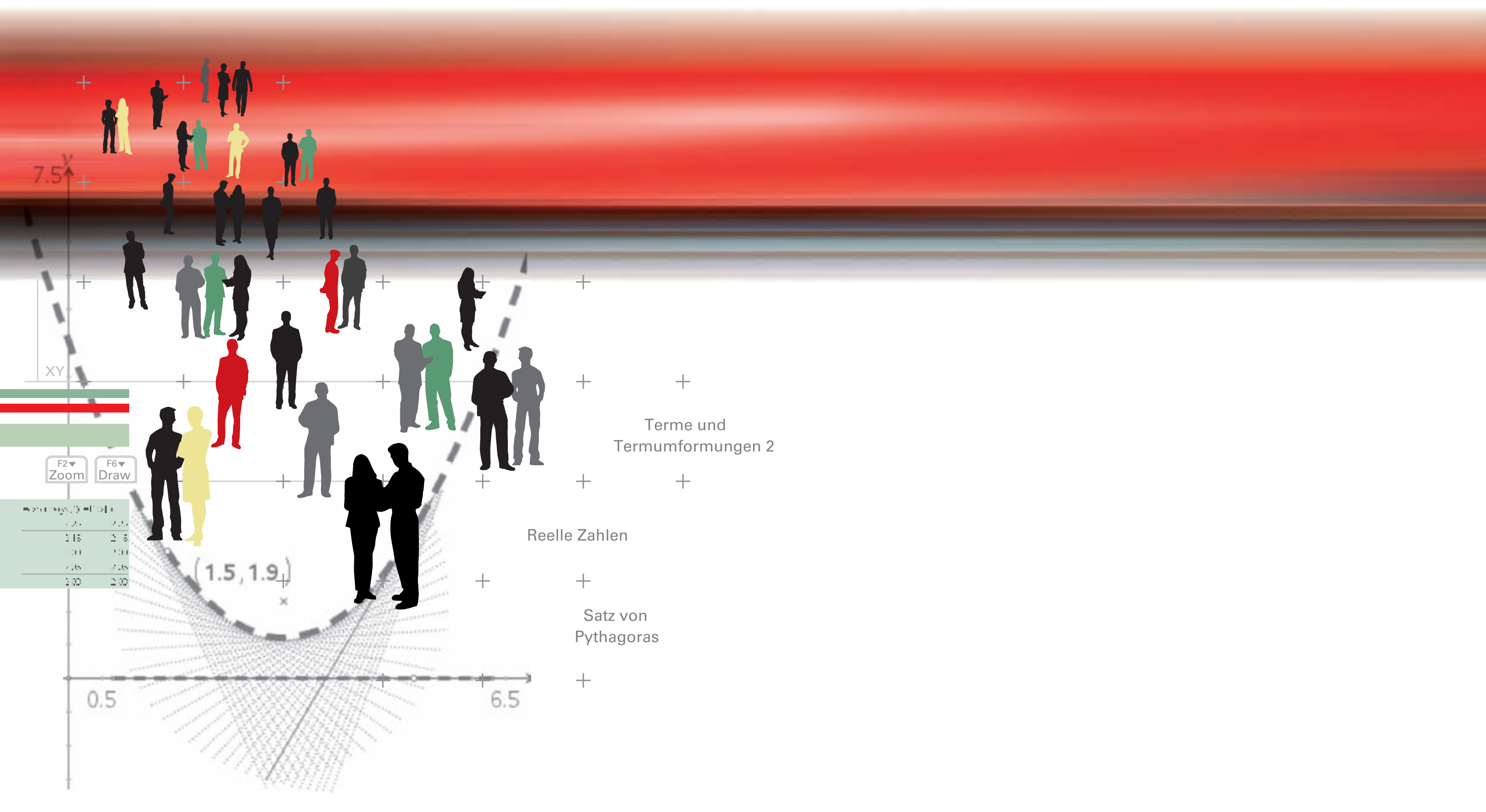
T³ DEUTSCHLAND

CAliMERO

Computer-Algebra im Mathematikunterricht: Entdecken, Rechnen, Organisieren

METHODISCHE UND DIDAKTISCHE HANDREICHUNG
BAND 4

Regina Bruder, Wilhelm Weiskirch (Hrsg.)



Niedersachsen

CAliMERO

Computer-Algebra im Mathematikunterricht: Entdecken, Rechnen, Organisieren

METHODISCHE UND DIDAKTISCHE HANDREICHUNG
BAND 4

Regina Bruder, Wilhelm Weiskirch (Hrsg.)

Die Materialien entstanden im Rahmen eines Schulversuches des Landes Niedersachsen mit dem Thema:
Computer-Algebra-Systeme im Mathematikunterricht der Jahrgänge 7-10 des Gymnasiums
hier: Ein Schulversuch zur Entwicklung eines Unterrichtskonzepts sowie von Materialien zum Einsatz im Unterricht mit wissenschaftlicher Begleitung

Die wissenschaftliche Begleitung wurde durch Frau Prof. Dr. Regina Bruder von der TU Darmstadt übernommen, Herr StD Wilhelm Weiskirch vom Ratsgymnasium Stadthagen koordinierte die Durchführung.

Unterstützt wurde der Schulversuch von der Firma Texas Instruments, die dem Verein n-21 angehört, durch die Bereitstellung der wissenschaftlichen Begleitung, die Übernahme der Veröffentlichungskosten und die Finanzierung von Arbeitstagungen.

Verlag:
Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Zentrum für Lehrerbildung

Vorwort

Liebe Kolleginnen, liebe Kollegen:

Dieses Buch ist in einem Schulversuch des Landes Niedersachsen extra zu dem Zweck entwickelt worden, um mit dem Taschencomputer (TC) ein durchgängiges Konzept für einen effektiven Unterricht zu haben. Neben neu entwickelten Aufgaben wurden auch Aufgaben aus Lehrbüchern ausgewählt, die speziell für einen Unterricht mit dem Einsatz eines TC geeignet sind.
Im Schulversuch konnte gezeigt werden, dass ein Unterricht mit diesem Aufgabenmaterial und dem Einsatz eines Taschencomputers einen Mehrwert an mathematischer Kompetenz erbringen bzw. diese wesentlich unterstützen kann. Es konnte auch gezeigt werden, dass durch den Einsatz des Taschencomputers die Kommunikation der Schülerinnen und Schüler unterstützt und eine Vorgehensreflexion gefördert wurde. Von großer Bedeutung für eine erfolgreiche Arbeit mit einem Taschencomputer ist ein ganzheitliches Unterrichtskonzept, in dem darauf geachtet wird, dass neben offenen, kreativitätsfördernden Aufgaben mit Rechnerunterstützung immer wieder auch mathematisches Grundkönnen ohne Rechner gefördert und eingefordert wird.
Um den Schülerinnen und Schülern mehr Verantwortung für ihr eigenes Lernen zu übertragen, ist es sinnvoll, ihnen Gelegenheit zur Selbsteinschätzung vor einer bewerteten Leistungskontrolle zu geben. Mit den "Ich kann..."-Fragen werden die zum jeweiligen Thema wichtigsten inhaltlich gebundenen Fähigkeiten und Fertigkeiten der jeweiligen Unterrichtseinheit beschrieben.
Die Aufgabensammlungen für die einzelnen Unterrichtseinheiten sind so zusammengestellt, dass sie die in den Bildungsstandards geforderten Kompetenzen unterstützen und fördern. Zu dem Themenheft für Schülerinnen und Schüler gibt es entsprechend entwickelte Handreichungen für Sie.

Dieses vierte Themenheft hat vier Kapitel.

1. **Terme und Termumformungen 2**
2. **Reelle Zahlen**
3. **Satz von Pythagoras**
4. **Kopfübungen - Basiswissen**

Anknüpfend an die Vorkenntnisse der Schülerinnen und Schüler wird die Multiplikation von Summen erarbeitet. Hier geht es zunächst um eine Flächenteilung und unterschiedliche Berechnungsweisen. Der sich daraus ergebende mathematische Gehalt liefert eine Möglichkeit, Produkte von Summen zu berechnen. Dieses wird anschließend geübt und durch eine neue Sichtweise vertieft. In den weiteren Stunden wird das Distributivgesetz geübt und die Rechnerbefehle "expand" und "factor" erneut verwendet, um Entdeckungen zu machen.
Mithilfe von Veränderungen quadratischer Flächen werden die binomischen Formeln als Spezialfälle für das Ausmultiplizieren von Summen eingeführt. Im Folgenden wird auf geometrische Veranschaulichungen und vielfältiges Üben besonderer Wert gelegt. Dabei kann der Unterrichtende aus der Vielzahl der Materialien eine Auswahl treffen. Der TC kommt beim Vergleichen komplexerer Terme, in denen die binomischen

Formeln eine Rolle spielen, und bei der Erweiterung auf höhere Potenzen (Pascalsches Dreieck) zum Tragen.
Die Sicht auf Terme, wie sie in den zurückliegenden Stunden beispielsweise zur Berechnung von Flächeninhalten entwickelt wurde, wird im Folgenden erweitert, indem Terme als Funktionsterme aufgefasst werden, die eine Zuordnung von einzugebenden auf auszugebende Werte leisten. Dabei wird besonders die Möglichkeit des Rechners genutzt, die Entwicklung des funktionalen Denkens zu fördern.
Wie Termmauern zum unterschiedlichen Kompetenzerwerb bei Schülerinnen und Schülern beitragen können, wird durch kleine Variationen der Aufgaben angesprochen. Zudem gelingt eine Differenzierung im Hinblick auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben.
Die Einführung der Quadratwurzel erfolgt an einem anwendungsbezogenen Beispiel. Dabei wird das Heron-Verfahren angebahnt. Es soll die Frage untersucht werden, wie man ohne eine Quadratwurzeltaste Wurzeln berechnen kann. Dabei steht das Heron-Verfahren als Rechner-Algorithmus im Mittelpunkt, aber auch das Intervallhalbierungsverfahren wird thematisiert. Mit dem Heron-Verfahren lernen die Schülerinnen und Schüler die Technik der Iteration kennen. Die Umsetzung der Iteration auf dem TC erfolgt in einfacher Weise im [HOME]-Bildschirm. Die Irrationalität wird altersgemäß betrachtet und ein Bewusstsein für das Vorliegen von "neuartigen" Zahlen geschaffen. Damit wird der bisherige Zahlenbereich erweitert. Die Tiefe der Bearbeitung sollte an die Lerngruppe angepasst werden Die Schülerinnen und Schüler entdecken, wie man mit Wurzeln rechnet. Dazu lernen sie Regeln kennen und formen Terme um, die Wurzeln enthalten.

Über die Frage nach der Diagonalenlänge im Rechteck wird mit einer Zerlegungsfigur eine Formel ("Diagonalenformel") begründet, die bekanntermaßen den Satz von Pythagoras impliziert. Die Anwendung der Formel wird variationsreich an Flächen- und Raumfiguren geübt. Als Arbeitsform bietet sich eine Wochenplanarbeit an.
Die Umkehrung des Satzes wird empirisch über dynamisches Experimentieren mit der Pythagorasfigur erschlossen und im Kontext der Überprüfung von Rechtwinkligkeit und der Suche nach pythagoreischen Zahlentripeln verwendet. Das Aufgabenmaterial stellt vielfältige Vernetzungen zu anderen Themen und Fertigkeiten her. Es sollen auch historische Bezüge vorgestellt werden.

Den Abschluss bilden einige sogenannte Kopfaufgaben und Aufgaben zum Basiswissen.
Vermischte Kopfübungen sind eine **rituelle Lerngelegenheit** für das Wachhalten von mathematischem Grundwissen aus früheren Themen und Klassenstufen. Sie enthalten jeweils Grundaufgaben bzw. deren Umkehrungen zu verschiedenen nicht zum aktuellen Stoff gehörenden Begriffen, Verfahren oder Zusammenhängen, die dauerhaft verfügbar sein sollen. Sie sind Teil einer Selbsteinschätzung der Lernenden mit dem Ziel, Aktivitäten zum Füllen individueller Lücken anzuregen.
In jedem Unterrichtsbaustein lernen die Schülerinnen und Schüler wichtige mathematische Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren sowie deren typische Anwendungen kennen. Diese Lerninhalte sind auch für erfolgreiches Weiterlernen von zentraler Bedeutung. Wir nennen solche Lerninhalte kurz **Basiswissen.** In diesem Teil finden Sie Aufgaben, die alle wichtigen Basiskompetenzen der vergangenen Jahre aus den Bereichen Zahl, Messen, Raum und Form, Funktionale Zusammenhänge sowie Daten und Zufall wiederholen. Hier finden Sie einfache Aufgaben, für den Fall, dass die Schülerinnen und Schülern wenig Erinnerung haben, aber auch komplexere Aufgaben, um zu testen, wie viel noch gekonnt wird. Die Aufgaben aus diesem Teil helfen durch regelmäßige eigenständige Arbeit die Wissenslücken wieder zu schließen, die Schülerinnen und Schüler erinnern sich an mathematische Kenntnisse und mobilisieren ihre Fertigkeiten

sowie Fähigkeiten. Langfristig kann sich so eine hohe mathematische Kompetenz entwickeln und ein gutes Basiswissen entwickeln. Diese Aufgaben zum Basiswissen sind so gestaltet worden, dass sie gleichzeitig eine Vorbereitung auf das nächste Kapitel sind.

Die Autoren dieses Themenheftes wünschen Ihnen mit dem Taschencomputer und den Arbeitsmaterialien im Verbund mit den Handreichungen viel Erfolg!

Bergkirchen im Januar 2009

INHALTSVERZEICHNIS

Terme und Termumformungen 2

Reelle Zahlen

Satz von Pythagoras

Training

C A l i M E R O

Computer-Algebra im Mathematikunterricht
Entdecken, Rechnen, Organisieren

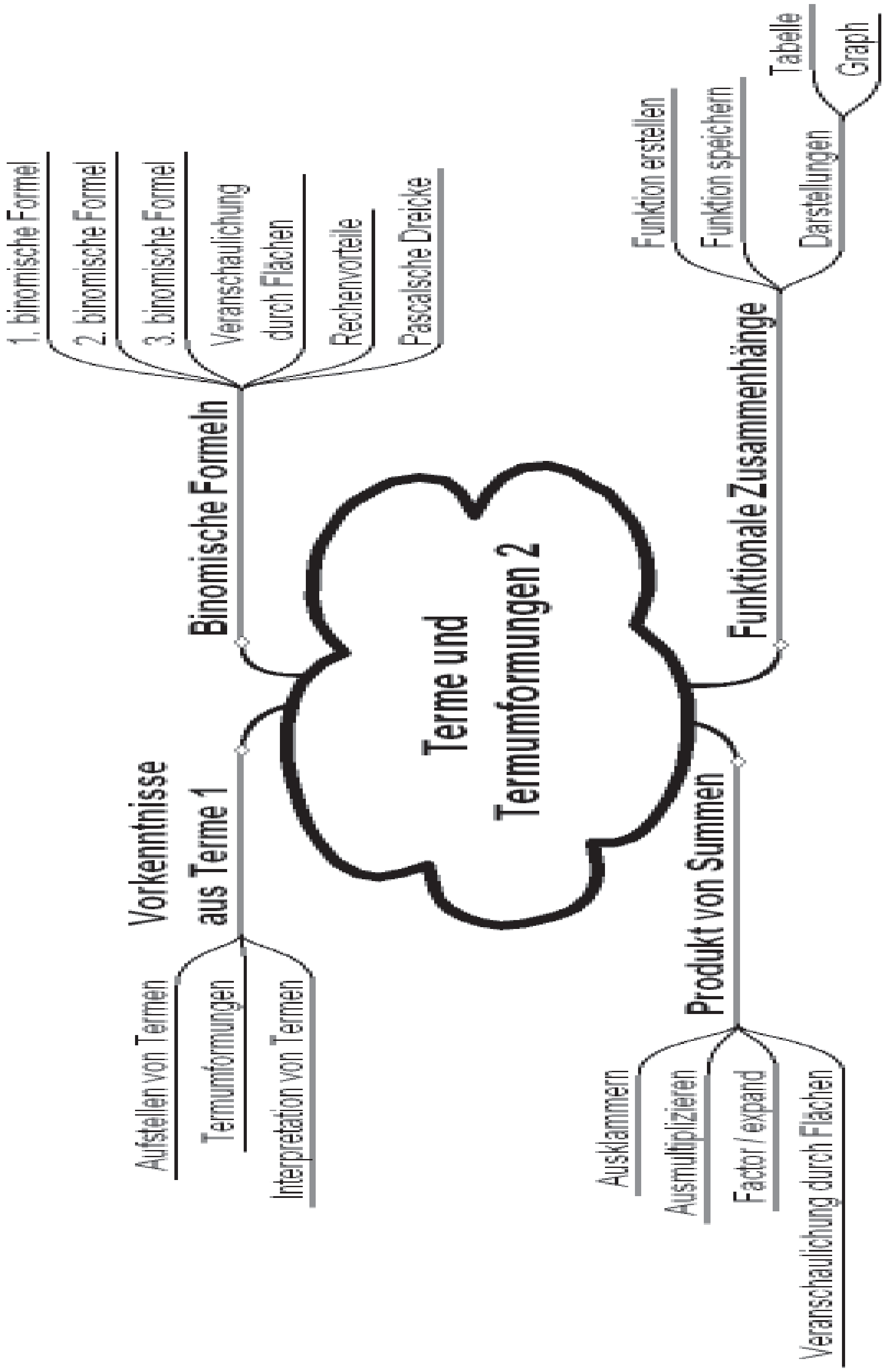
Terme und Termumformungen 2

L e h r e r m a t e r i a l i e n

Überblick über den Unterrichtsverlauf

Stunde		Seite
1 – 3	Produkte von Summen	13
4 – 10	Binomische Formeln	17
11 – 13	Funktionale Zusammenhänge	22

Mind Map mit Inhalten



Prozessbezogene Kompetenzen

Anhand dieses Unterrichtsmaterials können bei entsprechender methodischer Umsetzung folgende prozessbezogenen Kompetenzen des Kerncurriculums von den Schülerinnen und Schülern schwerpunktmäßig erworben sind:

Mathematisch argumentieren	**Probleme mathematisch lösen**	**Mathematisch modellieren**	**Mathematische Darstellungen verwenden**	**Mit symbolischen, formalen, …**	**kommunizieren**
präzisieren Vermutungen und machen sie einer mathematischen Überprüfung zugänglich, auch unter Verwendung geeigneter Medien beschaffen sich notwendige Informationen für mathematische Argumentationen und bewerten diese erläutern mathematische Sachverhalte, Begriffe, Regeln, Verfahren und Zusammenhänge unter Zuhilfenahme formaler Darstellungen nutzen mathematisches Wissen für Begründungen, auch in mehrschrittigen Argumentationen finden Begründungen durch Zurückführen auf Bekanntes, Einführen von Hilfsgrößen oder Hilfslinien vergleichen und bewerten verschiedene Lösungsansätze und Lösungswege	erfassen inner- und außermathematische Problemstellungen und beschaffen die zu einer Problemlösung noch fehlenden Informationen nutzen Darstellungsformen wie Terme und Gleichungen zur Problemlösung wenden algebraische, numerische, grafische Verfahren oder geometrische Konstruktionen zur Problemlösung an ziehen die Möglichkeit mehrerer Lösungen in Betracht und überprüfen diese beurteilen ihre Ergebnisse, vergleichen und bewerten Lösungswege und Problemlösestrategien erklären Ursachen von Fehlern	verwenden Terme mit Variablen, Gleichungen, Funktionen oder Regressionen zur Ermittlung von Lösungen im mathematischen Modell	stellen funktionale Zusammenhänge durch Tabellen, Graphen oder Terme dar, auch unter Verwendung des eingeführten Taschen-rechners, interpretieren und nutzen solche Darstellungen stellen geometrische Sachverhalte algebraisch dar und umgekehrt	erfassen und beschreiben Zuordnungen mit Variablen und Termen können überschaubare Terme mit Variablen zusammenfassen, ausmultiplizieren und ausklammern, um mathematische Probleme zu lösen nutzen die Probe zur Überprüfung von Ergebnissen nutzen den eingeführten Taschenrechner zur Kontrolle nutzen den eingeführten Taschenrechner zur Darstellung und Erkundung mathematischer Zusammenhänge sowie zur Bestimmung von Ergebnissen	teilen ihre Überlegungen anderen verständlich mit, wobei sie zunehmend die Fachsprache benutzen präsentieren Lösungs-ansätze und Lösungs-wege, auch unter Verwendung geeigneter Medien verstehen Überlegungen von anderen zu mathematischen Inhalten, überprüfen diese auf Schlüssigkeit und gehen darauf ein organisieren die Arbeit im Team selbstständig

Inhaltsbezogene Kompetenzen

Mit diesem Unterrichtsmaterial werden folgende inhaltsbezogenen Kompetenzen vermittelt:

Zahlen und Operationen	Größen und Messen	Raum und Form	funktionaler Zusammenhang	Daten und Zufall
führen Rechnungen mit dem eingeführten Taschenrechner aus und bewerten die Ergebnisse beschreiben Sachverhalte durch Terme und Gleichungen veranschaulichen und interpretieren Terme erkennen und vergleichen die Struktur von Termen nutzen Terme und Gleichungen zur mathematischen Argumentation modellieren inner- und außermathematische Problemsituationen mithilfe von Termen und Gleichungen formen Terme mithilfe der Rechengesetze um	berechnen und interpretieren zusammengesetzte Größen schätzen und berechnen Umfang und Flächeninhalt geradlinig begrenzter Figuren		untersuchen, beschreiben und begründen Auswirkungen von Parametervariationen bei linearen und quadratischen Funktionen unter Verwendung des eingeführten Taschenrechners	

Hinweise zu rechnerspezifischen und rechnerfreien Fertigkeiten

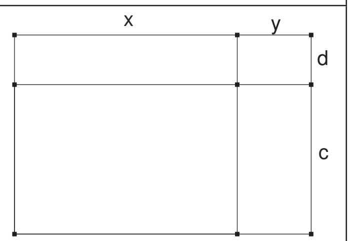
Rechnerfreie Fertigkeiten

Obwohl die Einheit "Terme und Termumformungen 2" mit Verwendung des TC als Werkzeug unterrichtet wird, sollen bestimmte Fertigkeiten von den Schülerinnen und Schülern auch rechnerfrei erworben und beherrscht werden. Diese Fertigkeiten sollen in der Klassenarbeit oder in Kurztests nachgewiesen beziehungsweise abgeprüft werden (siehe 6. Überprüfung rechnerfreier Fertigkeiten). Folgende rechnerfreie Fertigkeiten erscheinen uns relevant:

Die Schülerinnen und Schüler sollen:

1. Anhand von Kommutativ- und Assoziativgesetz die Möglichkeit zum Zusammenfassen in Termen erkennen. Dabei sollen die Terme nicht mehr als drei Summanden enthalten. Diese Summanden sollen wiederum aus nicht mehr als drei Faktoren bestehen (siehe Beispiele).
2. Das Distributivgesetz zum Ausmultiplizieren und Ausklammern benutzen. Dabei sollte sich die Komplexität an Beispiel 2 orientieren.
3. Zu einfachen zusammengesetzten Flächen verschiedene Terme aufstellen und deren Gleichwertigkeit auch algebraisch nachweisen.
4. Terme in ihrer Struktur erkennen, deuten und vergleichen (Termstrukturkompetenz).
5. Die binomischen Formeln zum Ausmultiplizieren und Faktorisieren benutzen. Dabei sollte sich die Komplexität an Beispiel 4 orientieren.

Beispiele:

1.	Fasse die folgenden Terme so weit wie möglich zusammen: a) $3 \cdot x + 2 - x$	 b) $y^2 + 3 \cdot x^2 - x \cdot 2 \cdot x$
2.	Multipliziere aus: a) $2 \cdot (x - 1)$ c) $(x + 1) \cdot (y - 3)$ Klammere aus: a) $3 \cdot a - 9$	 b) $x \cdot (x + 1)$ d) $(a + b + 5) \cdot (x + 7)$ b) $a - b \cdot a$
3.	Gib zur Flächenberechnung zwei Terme an und weise ihre Gleichwertigkeit nach.	
4.	Multipliziere aus: a) $(x - 1)^2$ Verwandle in ein Produkt: a) $a^2 + 6 \cdot a + 9$	 b) $(y - 3)^2$ b) $4 \cdot x^2 - 24 \cdot xy + 9 \cdot y^2$

CAS-Fertigkeiten

Im Umgang mit dem TC sollen die Schüler am Ende der Einheit über folgende Fertigkeiten verfügen:

1. Terme in den TC eingeben und die Ausgabe des TC nachvollziehen können (automatische Termumformung des TC).
2. Terme in den TC eingeben und das Distributivgesetz mithilfe der Befehle "expand" und "factor" anwenden. Dies erfordert ein verständiges Umgehen mit diesen beiden Befehlen.
3. Flächen- und Volumenformeln als Funktionen definieren und diese zur Berechnung nutzen. Damit wird schrittweise die Fertigkeit weiterentwickelt, Funktionen mithilfe eines Terms zu definieren und zu verwenden.

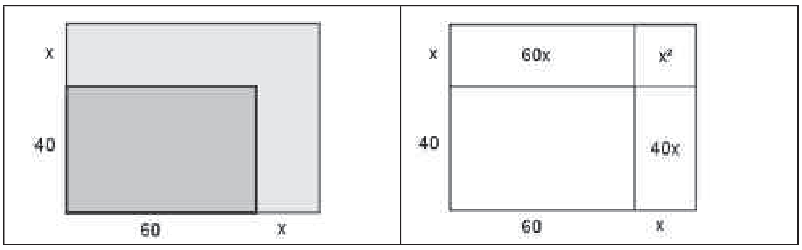
Beispiele:

	Eingabe	Ausgabe
1.	$4\cdot a + 5\cdot a$	$9\cdot a$
	$-(-b - a)$	$a + b$
	$2\cdot x - 5 \cdot (-2\cdot x + 3\cdot y) + 2 - y$	$12x - 16y + 2$ Bemerkung: Hier muss nicht der "expand"-Befehl zum Ausmultiplizieren verwendet werden.
2.	expand($2 \cdot (x - 4)$)	$2\cdot x - 8$
	expand($(2 - x) \cdot (x - 4)$)	$-x^2 + 6\cdot x - 8$
	factor($21 + 3 \cdot x$)	$3 \cdot (x + 7)$
	factor($-x^2 + 6\cdot x - 8$)	$(2 - x) \cdot (x - 4)$
3.	$2\cdot x + 2\cdot y \rightarrow A(x,y)$ $A(2,4)$ $A(m,5\cdot m)$	Done 12 $12\cdot m$

Thema 1.: Multiplikation von Summen	**Dauer:** 3 Stunden
Anknüpfend an die Vorkenntnisse der Schülerinnen und Schüler wird die Multiplikation von Summen erarbeitet. Hier geht es zunächst um eine Flächenteilung und unterschiedliche Berechnungsweisen. Der sich daraus ergebende mathematische Gehalt liefert eine Möglichkeit, Produkte von Summen zu berechnen. Dieses wird anschließend geübt und durch eine neue Sichtweise vertieft. In den weiteren Stunden wird das Distributivgesetz geübt und die Rechnerbefehle "expand" und "factor" erneut verwendet, um Entdeckungen zu machen.	
Besondere Materialien / Technologie: TC; Folienvorlagen LM 1.1 und LM 1.2; SM 1.1. bis 1.5 (optional 1.6)	

Ablauf der Stunde 1:

<table>
<tr><th>Inhalt</th><th>Medien</th><th>Kommentar</th></tr>
<tr><td>
Einstieg:
<table><tr><td>"Müller"</td></tr><tr><td></td></tr></table>
<table><tr><td>"Meier"</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>
Der Aufgabenteil mit Familie Müller knüpft an die Vorkenntnisse der Schülerinnen und Schüler an. Die Terme von Familie Meier führen auf die Multiplikation von Summen.
Entdeckung:
<table><tr><td>Extrakt "Müller":</td><td>Extrakt "Meier":</td></tr><tr><td>a·(b + c) = a·b + a·c</td><td>(a + b)·(c + d) = a·c + a·d + b·c + b·d</td></tr></table>
Die Gleichwertigkeit der Terme wird von den Schülerinnen und Schülern anhand der Flächenzerlegungen erläutert.
</td><td>SM 1.1,
Aufg. 1</td><td>PA

UG
Sicherung im Wissensspeicher</td></tr>
<tr><td>
Vertiefung:


Die Veränderung des Flächeninhalts wird als Summe der Rechtecksflächen identifiziert.
Durch die Frage nach der Veränderung des Flächeninhalts sollen die entstehenden Terme aus einem anderen Blickwinkel gedeutet werden.
Schüler präsentieren ihre Lösung an der Tafel.
</td><td>SM 1.1,
Aufg. 2

Tafel

Folie
LM 1.1</td><td>PA
Die Aufgabenstellung ermöglicht geometrische und algebraische Lösungen. Zumindest die geometrische Darstellung sollte ins Heft übernommen werden.</td></tr>
<tr><td>
Hausaufgabe:
Auszug aus amerikanischem Mathematikbuch → Vorstellung des Rechteckdiagramms zur Visualisierung der Multiplikation von Summen
</td><td>SM 1.2,
Aufg. 3</td><td>Die Hausaufgabe bereitet die nächste Stunde vor.</td></tr>
</table>

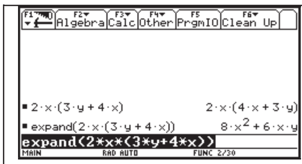
Ablauf der Stunde 2:

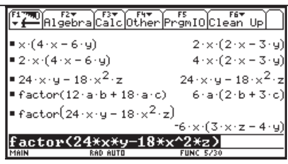
<table>
<tr><th>Inhalt</th><th>Medien</th><th>Kommentar</th></tr>
<tr><td>Einstieg:
<table>
<tr><td></td><td>3</td><td>- 4 x</td></tr>
<tr><td>2 x</td><td>6 x</td><td>- 8 x²</td></tr>
<tr><td>4</td><td>12</td><td>- 16 x</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
(+)(+) =
Neben der Benutzung des Rechteckdiagramms liefert die zweite Darstellung eine weitere Möglichkeit, die Multiplikation von Summen zu systematisieren.
Die Schülerinnen und Schüler vertiefen ihre Kenntnisse im Multiplizieren von Summen und lernen eine Möglichkeit zur Systematisierung des Verfahrens kennen.</td><td>SM 1.2, Aufg. 4

Folie LM 1.2</td><td>PA

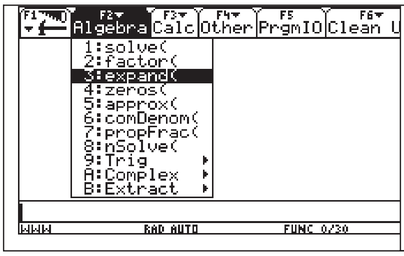
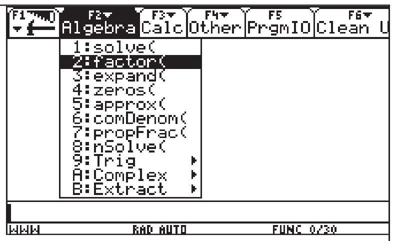
Eine Sicherung im Wissensspeicher ist möglich.</td></tr>
<tr><td>Übung:
Anhand vielfältigen Aufgabenmaterials sollen die Zusammenhänge vertieft werden. Hierbei steht die Übertragung des Verfahrens im Vordergrund.</td><td>SM 1.3, Aufg. 5 – 8</td><td>Die Terme sind so gewählt, dass diese Aufgaben händisch bearbeitet werden sollen. Visualisierungen sind jeweils angebracht.</td></tr>
<tr><td>Hausaufgabe</td><td>SM 1.3, Aufg. 9</td><td>Die Hausaufgabe reflektiert die Übungen.</td></tr>
</table>

Ablauf der Stunde 3:

<table>
<tr><th>Inhalt</th><th>Medien</th><th>Kommentar</th></tr>
<tr><td>Einstieg:




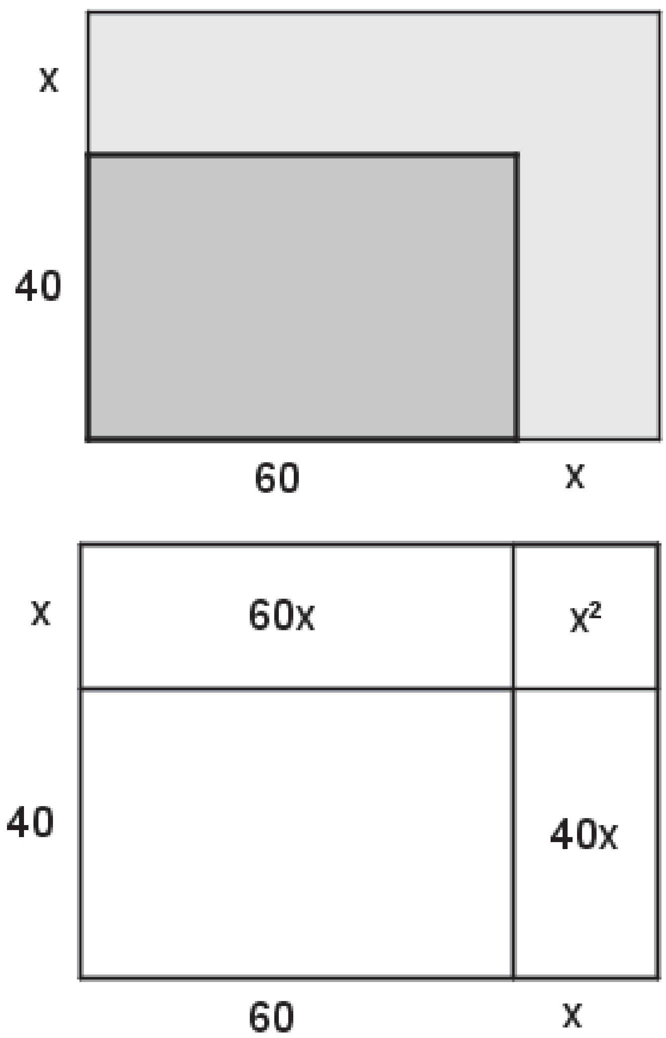
Die Befehle werden zunächst wiederholt.</td><td>SM 1.4, Aufg. 10 und 11</td><td>PA
Die schon bekannten Rechnerbefehle "expand" und "factor" werden erneut verwendet, um Entdeckungen zu machen.</td></tr>
</table>

Übertragen:  Die Befehle werden auf die neue Fragestellung "Multiplikation von Summen" übertragen. "expand" und "factor" werden verwendet, um Entdeckungen zu machen und um den Rechner zur Ergebniskontrolle zu nutzen.	SM 1.4, Aufg. 12 und 13	PA Sicherung im Wissens-speicher Aufgabe 13 ist fakultativ einzusetzen
Übungen: In den weiteren Übungen werden die Gesetze angewendet und der Rechner zur Ergebniskontrolle eingesetzt.	SM 1.5, Aufg. 14 – 16	Die Übungsaufgaben sind je nach Situation in den Lerngruppen durch weitere Aufgaben zu ergänzen. Dabei sollte auf Variabilität der Aufgaben-stellungen geachtet werden.
Optionale Hausaufgabe in Form eines Lernprotokolls	SM 1.5, Aufg. 17	
Optional: Termmauern Hier wird der Umgang mit Termen variantenreich geübt. Eine Vernetzung zum Distributivgesetz (Terme 1) ist gegeben. Die vielfältigen Möglichkeiten des Einsatzes von Termmauern zum Kompetenzerwerb und zur Binnendifferenzierung sind im Anhang detailliert dargestellt.	SM 1.6, Aufg. 18	

Anmerkungen zum Konzept eines "Lernprotokolls" als ritualisierte Lerngelegenheit:

- das Einstiegsproblem (und einen Lösungsansatz) zum aktuellen Thema beschreiben
- eine Grundaufgabe und eine ihrer Umkehrungen lösen
- Was sind typische Anwendungsfelder des neuen Begriffs, Verfahrens oder Zusammenhangs? Wann kann man diese **nicht** anwenden?
- Welche (typischen) Fehler beim Umgang mit den (neuen) mathematischen Werkzeugen können passieren?

Folienvorlage LM 1.1



Folienvorlage LM 1.2

Thema 2.: Binomische Formeln	**Dauer:** 7 Stunden
Mithilfe von Veränderungen quadratischer Flächen werden die binomischen Formeln als Spezialfälle für das Ausmultiplizieren von Summen eingeführt. Im Folgenden wird auf geometrische Veranschaulichungen und vielfältiges Üben besonderer Wert gelegt. Dabei kann der Unterrichtende aus der Vielzahl der Materialien eine Auswahl treffen. Der TC kommt beim Vergleichen komplexerer Terme, in denen die binomischen Formeln eine Rolle spielen, und bei der Erweiterung auf höhere Potenzen (Pascalsches Dreieck) zum Tragen.	
Besondere Materialien/Technologie: TC; Folienvorlage LM 2.1 und LM 2.2; SM 2.1 – 2.5	

Ablauf der Stunde 1:

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Vorstellung der Aufgabenstellung "Grundstücksveränderung" mit Diskussion in Gruppen	LM 2.1, OHP SM 2.1, Aufg. 1	LV / GA
Erarbeitung: Die Zuordnung zu den Abbildungen führt zu "Prototypen" der drei binomischen Formeln. Die Bearbeitung der Situationen mithilfe von Termen führt zu den Lösungen $(a + 3) \cdot (a + 3) = a^2 + 6a + 9$ $(a - 3) \cdot (a - 3) = a^2 - 6a + 9$ $(a + 3) \cdot (a - 3) = a^2 - 9$ Aufgabenteil c) lässt eine Lösung auf verschiedenen Niveaustufen zu. Es ist eine Untersuchung mit konkreten Zahlen genauso möglich wie mit Variablen. Entscheidend ist dabei die Berücksichtigung des gemischten Gliedes.		GA Präsentation der Ergebnisse der GA und Verallgemeinerung ggf. im Plenum.
Hausaufgabe: Übertragung der neuen Strategie auf die Problematik der Aufg. 2. Mit der Aufgabe kann u. U. noch in der Stunde begonnen werden.	SM 2.1, Aufg. 2	EA / PA

Ablauf der Stunde 2:

Inhalt	Medien	Kommentar
Besprechung der HA und Verallgemeinerung: Die Besprechung sollte zu einer Verallgemeinerung der Aufgaben 1 und 2 überleiten. Ergebnis: drei binomische Formeln	LM 2.1 SM 2.1, Aufg. 1, 2	
Übung: Bearbeitung von Teilen der Aufgaben 1 bis 3	SM 2.2, Aufg. 1 – 3	EA / PA UG
Hausaufgabe: Bearbeitung von restlichen Teilen der Aufgaben 1 bis 3	SM 2.2, Aufg. 1 – 3	

Ablauf der Stunde 3:

Inhalt	Medien	Kommentar
Besprechung der HA: Restliche Teile der Aufgaben 1 bis 3	SM 2.2, Aufg. 1 – 3	Schülerpräsentation mit konkretem Bezug zu den binomischen Formeln
Erarbeitung: Verdeutlichung der Rechenvorteile mit binomischen Formeln am Beispiel $99 \cdot 101$		UG
Übung: Bearbeitung der Aufgabe 4.a) bis 4.f) Evtl. 4.g): Schüler finden eigene Beispiele für Rechenvorteile mit den binomischen Formeln.	SM 2.2, Aufg. 4	EA / PA UG
Hausaufgabe: Die gefundenen Aufgaben werden partnerweise als Hausaufgabe gestellt.		

Ablauf der Stunden 4/5:

Inhalt	Medien	Kommentar
Besprechung der HA: Vergleich der Ergebnisse.		PA
Erarbeitung 1: Das Einstiegsbeispiel der Grundstücksflächenveränderung wird jetzt verallgemeinert. Herleitung der Beziehung zwischen den Term- und Flächenteilen für das Beispiel der Aufgabe SM 2.1, 1(I). Mithilfe der OH-Folie und der ausgeschnittenen Folien-Flächenstücken a^2, $a \cdot b$ und b^2 sollen für die Schüler die Entsprechungen mithilfe des Overlay-Verfahrens visualisert werden.	OHP LM 2.1	UG
Erarbeitung 2: Herleitung der Beziehung zwischen den Term- und Flächenteilen für die Beispiele der Aufgabe 1.(II) und 1.(III)	SM 2.1, Aufg. 1	PA Als Hilfe können den Schülern die Folien-Flächenstücke am Pult angeboten werden.
Übung: Je nach Bedarf und Lernfortschritt können weitere Übungsaufgaben zum Training herangezogen werden.	SM 2.3, Aufg. 1, 2	
Hausaufgabe: Nach Bedarf werden aus SM 2.5 Aufgaben ausgewählt.	SM 2.5	

Ablauf der Stunde 6:

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Die Tabelle mit Zahl und zugehöriger Quadratzahl wird gezeigt. Dazu werden Ideen und Vermutungen zu der Art des Wachstums der Quadratzahlen gesammelt.	LM 2.2 OHP	UG
Erarbeitung 1: Aufgabe 1.a) und 1.b) Die Ideen der Schüler werden mit den formulierten Vermutungen von Nico, Ilona und Oliver verglichen. Zur Überprüfung der Vermutungen werden Mathematisierungshilfen gegeben. Nimmt man als Variablennamen beispielsweise n, dann sind die jeweiligen Zahlen und Quadratzahlen durch Terme mit n auszudrücken. Die Tabelle gibt eine "Starthilfe".	SM 2.4, Aufg. 1	UG Hier ist sicher zu stellen, dass die Schüler einerseits die drei Vermutungen und andererseits die drei Möglichkeiten der Variablenzuordnung verstehen.

Erarbeitung 2: Aufgabe 1.c) bis 1.e) Vergleich von verschiedenen Termen mit binomischen Formeln	SM 2.4, Aufg. 1	PA Der Vergleich kann sowohl mit TC als auch händisch erfolgen.
Hausaufgabe: Aufgabe 1.f)	SM 2.4, Aufg. 1.f)	

Ablauf der Stunde 7:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Besprechung der HA: Aufgabe 1.f)	SM 2.4, Aufg. 1.f)	
Erarbeitung: Aufgabe 2 Die Systematik der Summenterme zu $(a + b)^n$ sollte erkannt werden. Das Pascalsche Dreieck wird vorgestellt und benannt.	SM 2.4 Aufg. 2	GA UG

Folienvorlage LM 2.2

Wie wachsen Quadratzahlen?

Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8
Quadratzahl	1	4	9	16	25	36	49	64

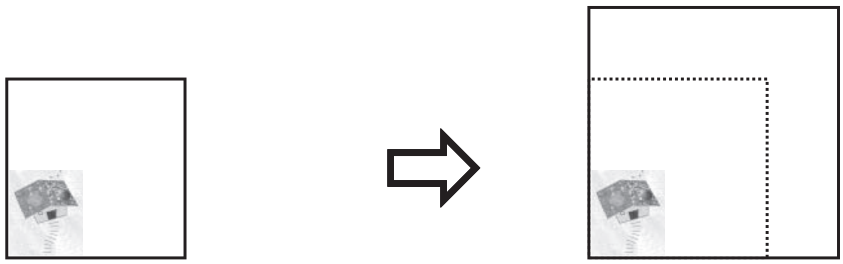
Folienvorlage LM 2.1

Aufgabe 1

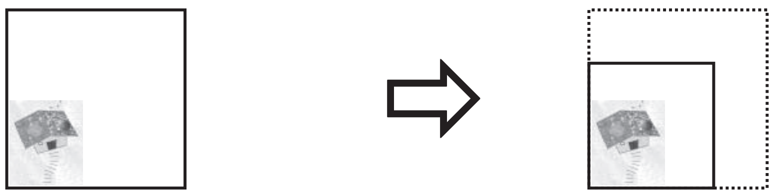
Wegen baulicher Maßnahmen müssen die quadratischen Grundstücke der Familien Thamm, Bauer und Diercks verändert werden.
Bei Familie Thamm wird das Grundstück auf der einen Seite um einen 3 m breiten Streifen verkürzt und dafür auf der anderen Seite um einen 3 m breiten Streifen verlängert.
Bei Familie Bauer wird das Grundstück sowohl in der Länge als auch in der Breite um 3 m vergrößert. Bei Familie Diercks wird das Grundstück sowohl in der Länge als auch in der Breite um 3 m verkürzt.

a) Ordne die Grundstücksveränderungen der Familien den Abbildungen zu.
b) Stelle für jede Grundstücksveränderung einen Term zur Flächeninhaltsberechnung auf.
c) Untersuche, wie sich der Flächeninhalt im Vergleich zur ursprünglichen Grundstücksgröße verändert.

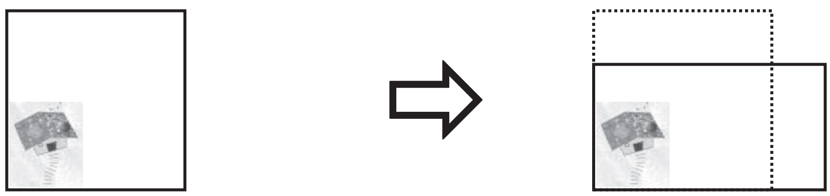
I)

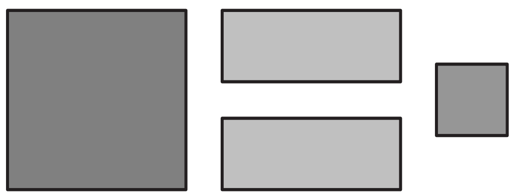


II)



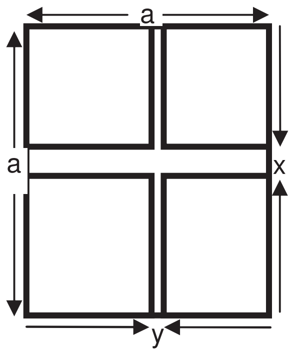
III)



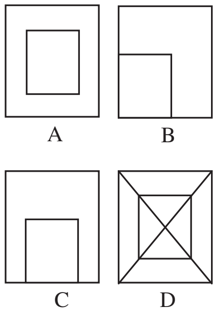


Thema 3.: Funktionale Zusammenhänge	**Dauer:** 3 Stunden
Diese Stunden sollen die Sicht auf Terme, wie sie in den zurückliegenden Stunden beispielsweise zur Berechnung von Flächeninhalten entwickelt wurden, erweitern, indem Terme als Funktionsterme aufgefasst werden, die eine Zuordnung von einzugebenden auf auszugebende Werte leisten. Dabei wird besonders die Möglichkeit des Rechners genutzt, die Entwicklung des funktionalen Denkens zu fördern.	
Besondere Materialien/Technologie: SM 3.1 – 3.2	

Ablauf der Stunde 1:

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Die Aufgabe 1 dient dazu, den schon bekannten Aspekt eines funktionalen Zusammenhangs zwischen Ein- und Ausgabegrößen (z. B. adreieck(g,h)) wieder aufzugreifen. In Aufgabenteil a) wird im Rechner folgende Funktionsgleichung definiert:  $\mathrm{Gflaeche}(a,x,y) = (a-x)\cdot(a-y)$ $\mathrm{Gflaeche}(a,x,y) = a^2 - a\cdot x - a\cdot y + x\cdot y$ Berechnet wird in Aufgabenteil b) Gflaeche(75,1.5,0.9) = 5446.35 (m^2). An dieser Stelle bietet es sich an, auf die Wertegleichheit verschiedener Terme einzugehen.	OHP Tafel SM 3.1, Aufg. 1	SLG
Erarbeitung: Im Aufgabenteil c) wird eine Größe variiert und die Veränderungen werden in einer Tabelle festgehalten. Im Anschluss wiederholt Aufgabenteil d) das Abfassen einer Funktionsgleichung ($\mathrm{Wflaeche}(a,x,y) = a\cdot x + a\cdot y - x\cdot y$) und prüft durch die Frage in Aufgabenteil e) nach Interpretation der vom TC gelieferten Anzeigen nach Eingabe von Wflaeche(45,x,2x) bzw. Wflaeche(45,x,0.9x) das Verständnis für den aufgestellten funktionalen Zusammenhang. Der Aufgabenteil f) verlangt vom Lernenden sowohl ein verbales Beschreiben der zu untersuchenden Ungleichung $\mathrm{Wflaeche}(50,x,1.5x) \le 117.5$, als auch die Untersuchung von Wflaeche auf einen maximalen Wert für x. Dieser wird von den Schülern voraussichtlich durch Probieren gesucht (x = 0,95). Eine graphische Lösung ist auch möglich, wenn der Ansatz $\mathrm{Wflaeche}(50,x,1.5x) = 117.5$ benutzt wird.		PA / LSG
Hausaufgabe	SM 3.1, Aufg. 2	

Ablauf der Stunde 2:

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Vergleich der Hausaufgabe	Tafel	SLG
Erarbeitung: Mit Aufgabe 1 wird durch Vorgabe von Funktionsgleichungen eine Umkehrung zur Aufgabenstellung der vorangegangenen Stunde vorgelegt. Durch die Berechnungen der Flächeninhalte für vorgegebene Werte von a wird auch die Wertegleichheit der vier Terme ohne Umformen sichtbar und kann wieder diskutiert werden. 	SM 3.2, Aufg. 3	
Hausaufgabe: wahlweise SM 3.2, Aufgabe 4 oder Aufgabe 5	SM 3.2, Aufg. 4/5	

Ablauf der Stunde 3:

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Vergleich der Hausaufgabe Checkliste zur Selbsteinschätzung ausfüllen	Tafel Checkliste aus SM	SLG
Hausaufgabe: individuelle Wiederholung gemäß Checkliste	SM 2.5	

Didaktische Anmerkungen zum variantenreichen Einsatz von Termmauern

Im Folgenden wird dargestellt, wie Termmauern zum Kompetenzerwerb bei Schülerinnen und Schülern beitragen können. Durch kleine Variationen der Aufgaben werden verschiedene Kompetenzen angesprochen. Zudem gelingt eine Differenzierung im Hinblick auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben.

(1) stellt eine Aufgabe in 9 Variationen vor. (A) bis (D) sind mögliche Klassenarbeitsaufgaben. Je nach Stellenwert innerhalb der Klassenarbeit (Umfang und Anforderung) kann hier von einfacher Reproduktion bis komplexer Argumentation gewählt werden. Die Variationen (E) bis (I) sind dann Angebote für den Unterricht. Die geforderten Kompetenzen sind angegeben, die Aufgabenvariation ist ein wenig angelehnt an die "Kerzenaufgabe" bei Leuders/Büchter. So ist genügend Variabilität vorhanden, um auf spezifische Klassen- und Lehrsituationen Rücksicht zu nehmen. Man sollte überlegen, ob vielleicht eine der Variationen zur Pflicht gemacht wird.
(2) ist Handwerk (kann natürlich auch Klassenarbeitsaufgabe werden).
(5) Hier ist Wiederholung eingebaut, die beliebig erweitert und variiert werden kann. Es ist auch möglich, eine "Divisionsmauer" bauen.
(3), (4), (6) und (7) haben ihren Schwerpunkt im Bereich "Algebraisierung", nicht im Umformen.

Aufgabe 1

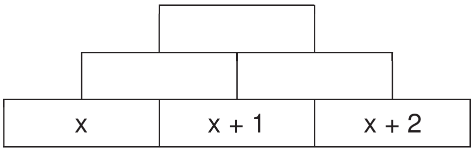
Die Aufgabe wird in mehreren Versionen mit unterschiedlichen Variationen angeboten. Von der "Leistungsaufgabe" zur "Lernaufgabe" oder auch als "Blütenaufgabe".

Vorbemerkung:
In jedem Stein steht die Summe der Terme der beiden darunter stehenden Steine. Der Term in der Spitze soll immer weitestgehend zusammengefasst werden.

Kompetenzen

(A) Klassenarbeitsaufgabe 1

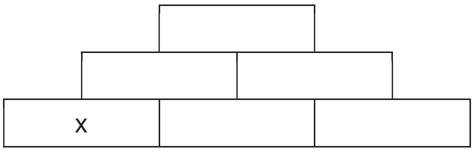
Fülle die Zahlenmauer auf.
Mache eine Probe durch Einsetzen von Zahlen für die Variable x.



– Technische Fertigkeit

(B) Klassenarbeitsaufgabe 2

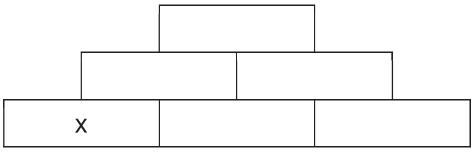
In den unteren drei Steinen stehen drei aufeinander folgende Zahlen.
Welcher Term steht in der Spitze?
Mögliche Hilfe in Aufgabenstellung:
"x+1" ist Nachfolger von "x"



– Technische Fertigkeit
– Mathematisieren

(C) Klassenarbeitsaufgabe 3

a) In den unteren drei Steinen stehen drei aufeinander folgende Zahlen. Welcher Term steht in der Spitze?
b) Durch welche Zahl ist der Term in der Spitze immer teilbar?
   Begründe.
   Variation:
   Zeige, dass der Term in der Spitze durch 4 teilbar ist.

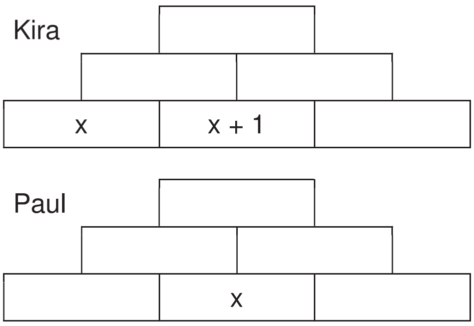


– Technische Fertigkeit
– Mathematisieren
– Argumentieren, begründen

(D) Klassenarbeitsaufgabe 4

In den unteren drei Steinen stehen drei aufeinander folgende Zahlen.

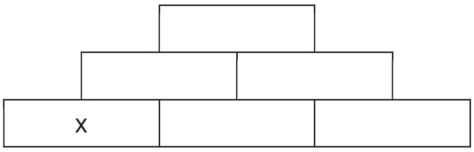
a) Fülle Kiras und Pauls untere Reihe auf und baue ihre Mauern.
b) Vergleiche Kiras und Pauls Terme im Spitzenstein. Welche Gemeinsamkeiten und welche Unterschiede haben sie? Begründe.



– Technische Fertigkeit
– Mathematisieren
– Argumentieren, begründen

(E)

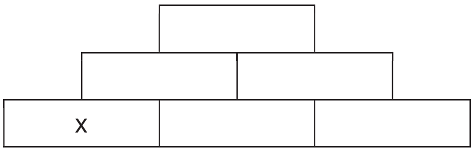
a) In den unteren drei Steinen stehen drei aufeinander folgende Zahlen. Welcher Term steht in der Spitze?
b) Welche Eigenschaft hat der Term in der Spitze? Probiere einige Einsetzungen für x aus.



– Technische Fertigkeit
– Mathematisieren
– Argumentieren, begründen

(F)

a) In den unteren drei Steinen stehen drei aufeinander folgende Zahlen. Welcher Term steht in der Spitze?
b) ***x*** kann unten auch in einem anderen Stein stehen, man erhält dann andere Mauern.
c) Vergleiche die Terme in der Spitze. Was haben sie gemeinsam, worin unterscheiden sie sich?



– Technische Fertigkeit
– Mathematisieren
– Argumentieren, begründen
– Kommunizieren

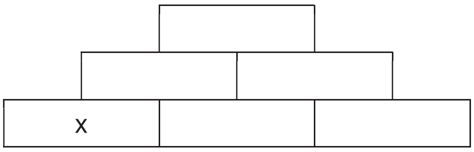
Methodische Bem.:
jeweils 1/3 der Klasse bearbeitet jeweils einen Fall, dann Vergleich in Gruppe

(G) Weiterbauen

a) In den unteren drei Steinen stehen drei aufeinander folgende Zahlen. Welcher Term steht in der Spitze?
b) Durch welche Zahl ist der Term in der Spitze immer teilbar? Begründe.
c) Die Mauer wird erweitert (vier aufeinanderfolgende Zahlen) und nach demselben Prinzip weitergebaut.
d) Vergleiche den neuen Term in der Spitze mit dem Spitzenterm in der 3-er Mauer.
e) Die Mauer wird nochmal erweitert zu einer 5-er Mauer. Fülle die Tabelle aus:

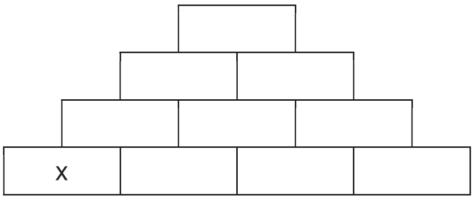
Anzahl der Basissteine	Term in Spitze
2	
3	
4	
5	

Kannst du eine Gesetzmäßigkeit für den Term in der Spitze erkennen? Welchen Term müsste man dann bei eine 6-er Mauer erhalten. Prüfe nach?



– Technische Fertigkeit
– Mathematisieren
– Argumentieren, begründen
– Kommunizieren

– Ausdauer

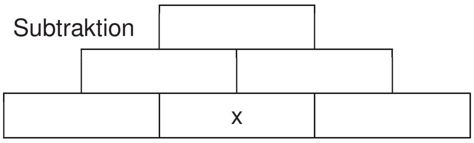


– Hypothesenbildung

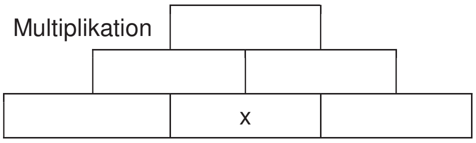
(H) Variation des Mörtels

a) In den unteren drei Steinen stehen drei aufeinander folgende Zahlen. Welcher Term steht in der Spitze?
b) Durch welche Zahl ist der Term in der Spitze immer teilbar? Begründe.
c) Ersetze die Addition durch
   1) Subtraktion
   2) Multiplikation.
      - Erkläre die Besonderheit des Spitzensteins bei der Subtraktion.
      - Für welche Werte von x steht bei der Multiplikation im Spitzenstein 0?

Subtraktion



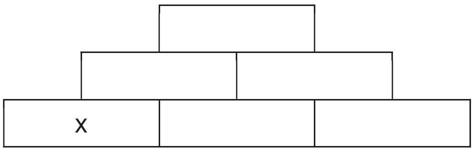
Multiplikation



– Technische Fertigkeit
– Mathematisieren
– Argumentieren, begründen
– Problemlösen

(I)

a) In den unteren drei Steinen stehen drei aufeinander folgende Zahlen. Welcher Term steht in der Spitze?
b) Durch welche Zahl ist der Term in der Spitze immer teilbar? Begründe.



– Technische Fertigkeit
– Mathematisieren

– Argumentieren, begründen

c) Vertausche die Terme in der unteren Reihe und baue wieder.
   - Vergleiche die Terme in der Spitze. Was haben sie gemeinsam, worin unterscheiden sie sich? Wann erhält man den größten Wert in der Spitze? Wann bleibt die Eigenschaft aus b) erhalten? Gib jeweils eine Begründung.
d) Zu jeder Einsetzung für x gehört ein Wert im Spitzenstein. Erzeuge zu den drei Mauern jeweils eine Graphik und eine Tabelle für die Zuordnung $x \rightarrow$ Spitzenstein.
   - Bei welcher Mauer tritt eine Proportionalität auf?
   - Für welchen Wert von x steht in der Spitze eine 0?

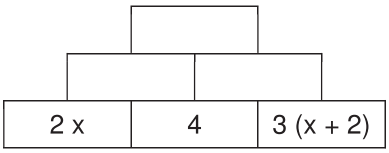
– Vernetzung

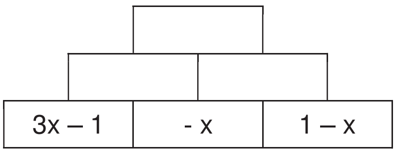
Aufgabe 2

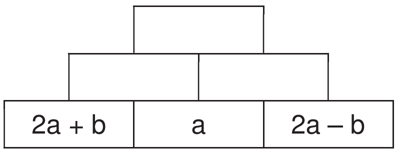
- Training technischer Fertigkeiten:

Baue nach oben mit

(a) Addition, (b) Subtraktion und (c) Multiplikation



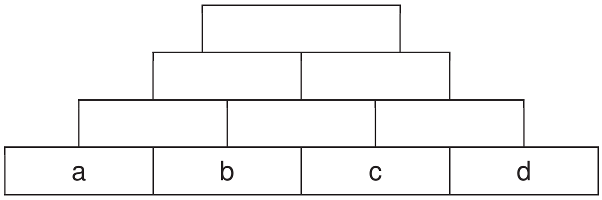




Aufgabe 3

- Von der Zahl zur Variablen
- Argumentieren und Begründen
- Ausdauer / Hypothesenbildung

Wie müssen die Zahlen in der untersten Reihe angeordnet werden, damit in der Spitze
a) die größte Zahl
b) die kleinste Zahl steht?
c) Wie kann man die Zahlen in der untersten Reihe umordnen, ohne dass sich die Zahl in der Spitze ändert?



Erstelle zunächst eine Zahlenmauer mit vier von dir gewählten Zahlen in der untersten Reihe. Vertausche die Zahlen und baue neu.
Fülle die Mauer mit Variablen aus und beantworte die Fragen mit der Variablen und gib Begründungen.
d) Für Menschen mit Ausdauer und für Forscher
Bestimme den Spitzenstein für Mauern mit 5, mit 6 und mit 7 Bausteinen an der Basis. Fällt dir eine Regelmäßigkeit auf, wie sich die Spitzensteine entwickeln? Kannst du damit ohne Bauen ermitteln, wie der Spitzenstein bei 8 Basissteinen aussieht?

Aufgabe 4

- technische Fertigkeit
- Argumentieren und Begründen

Du sollst jetzt Mauern mit 3 beliebigen Basisbausteinen a, b und c untersuchen.
a) Um wie viel erhöht sich die Zahl in der Spitze, wenn man jede Zahl an der Basis um 1 erhöht? Und wenn man jede Zahl um eine beliebige Zahl n erhöht?
b) Um wie viel wächst die Zahl in der Spitze, wenn man jede Zahl an der Basis (1) verdoppelt (2) verdreifacht?
Verallgemeinere die Ergebnisse von (1) und (2) zu einer Vermutung und beweise diese.

Du kannst zunächst mit Zahlen für a, b und c probieren.

Aufgabe 5

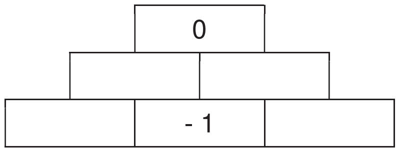
- Rechenfertigkeit (Wiederholen)
- Argumentieren und Begründen

Du sollst Mauern mit drei Basisbausteinen bauen. Setze dazu irgendwo
a) drei Zahlen ein und zwar (1) - 5 / - 2 / 3 und (2) $\frac{1}{4}$ / 3 / $\frac{2}{3}$
b) drei Variable a, b und c.
Variiere die Einsetzungen von a, b und c. Gibt es immer eine eindeutige Lösung?

Aufgabe 6

Partnerarbeit

- Argumentieren und Begründen
- Mathematisieren
- Kommunizieren
- Problemlösen



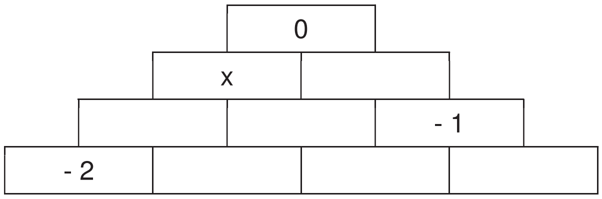
a) Warum kannst du mit den zwei Einsetzungen nicht sofort eine Mauer bauen?
b) Findet mindestens zwei verschiedene Lösungen und erläutere deinem Partner, wie du sie gefunden hast.
c) Setzt jeweils in einen anderen freien Stein eurer Wahl ein x bzw. ein y und baut die Mauer fertig.
d) Vergleicht eure Mauern. Füllt die Tabelle so aus, dass ihr jeweils dieselbe Mauer erhaltet.

x	y
1	
	- 2
0	
	3

Aufgabe 7

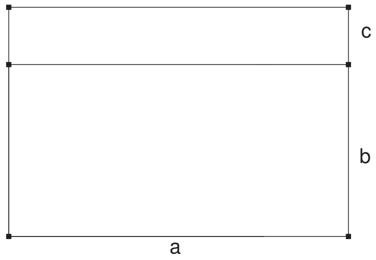
Baue die Mauer fertig.

Wenn du zunächst nicht weißt, wie du einen Stein bauen kannst, setze für x eine Zahl ein und probiere dann.

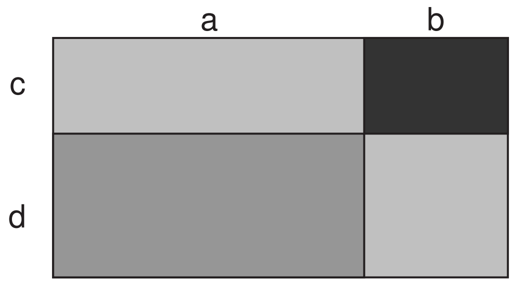


5. Wissensspeicher

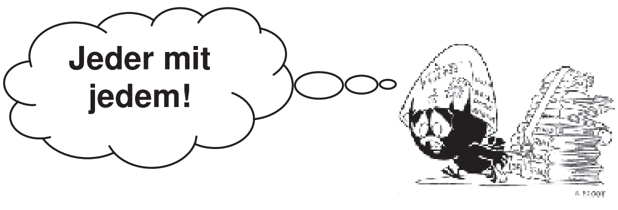
Multiplizieren von Summen



$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$



$$(a+b)\cdot(c+d) = ac + ad + bc + bd$$



Beim Ausmultiplizieren algebraischer Summen musst du jeden Summanden der einen Klammer mit jedem Summanden der anderen Klammer multiplizieren.

Von links nach rechts in der obigen Gleichung werden aus Produkten Summen. Mit dem Befehl "expand" kannst du diese Arbeit an den Taschencomputer weitergeben.
Von rechts nach links werden aus Summen Produkte. Der Befehl "factor" des Rechners faktorisiert die Summen für dich.

Binomische Formeln

Sind die zu multiplizierenden Summen gleich, so bekommt man einen berühmten Spezialfall:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	Erste binomische Formel
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	Zweite binomische Formel
$(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$	Dritte binomische Formel

6. Selbsteinschätzung

Schätze deine Kenntnisse ein und mache ein Kreuz in der entsprechenden Spalte.

Ich kann	**ich bin sicher**	**ich muss noch üben**	**ich brauche Hilfe**
• einen Faktor mit einer Summe multiplizieren $-7 \cdot (2 \cdot x - 3) = -14 \cdot x + 21$			
• aus einer Summe gemeinsame Faktoren ausklammern $(15 \cdot x - 21 \cdot x \cdot y) = 3 \cdot x \cdot (5 - 7 \cdot y)$			
• die Gleichwertigkeit von Termen überprüfen $a \cdot b \cdot (3 \cdot x + 4)$ und $3 \cdot a \cdot b \cdot x + 5 \cdot b$			
• eine Summe mit einer Summe multiplizieren $(a - 5) \cdot (b + 3) = a \cdot b + 3 \cdot a - 5 \cdot b - 15$			
• zur Berechnung von Flächeninhalten Terme aufstellen			
• mit den Befehlen "expand" und "factor" umgehen			
• alle drei binomischen Formeln nennen			
• binomische Formeln "vorwärts und rückwärts" anwenden $(3 \cdot x - 5 \cdot b)^2 \rightleftarrows 9 \cdot x^2 - 30 \cdot b \cdot x + 25 \cdot b^2$			
• binomische Formeln geometrisch darstellen und erläutern			
• unvollständige Terme zu binomischen Formeln ergänzen $x^2 + \quad x \cdot y + 9 \cdot y^2$			
• die binomischen Formeln erweitern (Pascalsches Dreieck)			
• zu einem Flächenproblem einen Funktionsterm erstellen $(a + x) \cdot (a - x) = \text{flaeche}(a,x)$			
• zu einem gegebenen Funktionsterm das zugehörige Flächenproblem finden			
• zu einer Funktion mit einer Variablen eine Wertetabelle erstellen			

7. Rechnerfreie Aufgaben

Aufgabe 1

Multipliziere aus und fasse ohne Hilfsmittel soweit wie möglich zusammen:

a) $(r - 10) \cdot (s - 5)$

b) $(\frac{1}{2} \cdot x + 4) \cdot (20 \cdot x - 10)$

c) $(0{,}7 \cdot a + 4) \cdot (10 \cdot y - 5)$

d) $(6 - v) \cdot (w + 8)$

e) $(3 \cdot a - 7 \cdot b) \cdot (2 \cdot a + 3 \cdot b)$

f) $(3 \cdot a - 7 \cdot b)\ (7 \cdot a + 3 \cdot b)$

Aufgabe 2

Stelle jeweils das Produkt als Summe dar und veranschauliche die Aufgaben geometrisch:

a) $(a + b) \cdot (c - d)$

b) $(a - b) \cdot (c + d)$

Aufgabe 3

Veranschauliche die folgenden Terme:

a) $2 \cdot x \cdot (c + d)$

b) $(2 \cdot x + 3 \cdot y) \cdot (c + d)$

Standardaufgaben zu den binomischen Formeln

Aufgabe 4

a) $(m - 13)^2$

b) $\square^2 + 24 \cdot x + \triangle = (x + 12)^2$

c) $(2 - x)(x + 2)$

d) $14 \cdot 16$

e) $4 \cdot a^2 + 24 \cdot a + \triangle = (\square + \bigcirc)^2$

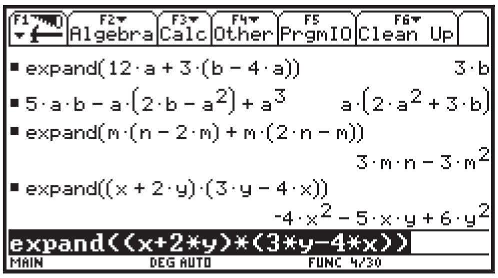
f) $(17 + t)^2$

g) Die Länge und die Breite einer quadratischen Grundfläche sollen in verschiedenen Kombinationen um 5 m verkleinert bzw. vergrößert werden. Veranschauliche die möglichen Fälle und stelle die Terme für den neuen Flächeninhalt auf.

8. Klassenarbeitsaufgaben

Aufgabe 1

Erkläre die Ergebnisse des Taschencomputers, indem du alle Lösungsschritte (unter Verwendung der Rechenregeln) notierst.



Aufgabe 2

Während einer Mathematikarbeit siehst du bei deinem Nachbarn (zufällig) folgende Zeile:

$$(5\cdot x + 6\cdot y)^2 = 25\cdot x^2 + 36\cdot y^2$$

Nimm Stellung! Begründe dazu, ob die Umformung richtig oder falsch ist.

Aufgabe 3

Multipliziere aus und fasse ohne Hilfsmittel soweit wie möglich zusammen:

a) $(a + 5) \cdot (b + 8)$

b) $(\frac{1}{2} \cdot x - 10) \cdot (4\cdot y + 6)$

c) $(0{,}4\cdot a - 2) \cdot (4\cdot a - 5)$

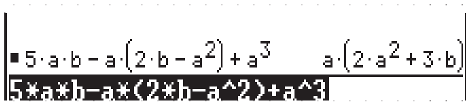
d) $(v + 8) \cdot (6 - w)$

e) $(3\cdot a + 7\cdot b) \cdot (4\cdot a - 5\cdot b)$

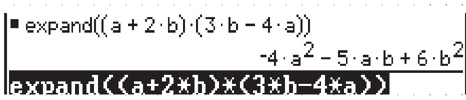
Aufgabe 4

Du siehst drei Umformungen des Taschencomputers. Forme jeweils den ersten Term von Hand so um, dass sich der zweite Term ergibt.

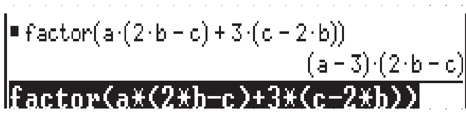
a)



b)



c)



Aufgabe 5

Vervollständige die folgenden Rechteckdiagramme, finde die richtige Aufgabenstellung und stelle deine Lösung systematisch dar:

		3
y	y^2	
		9

	$4\cdot y$	6
	$16\cdot y^2$	
		- 24

	x	
	x^2	
$3\cdot y$		$45\cdot y$

Aufgabe 6

Ergänze die Lücken:

a) $(\quad + 3) \cdot (y + 4) \;=\; a \cdot y + \nabla + 4 \cdot a + 12$

b) $(y^2 - 2) \cdot (x + \quad) \;=\; y^2 \cdot x - 2 \cdot x + \nabla - 6$

c) $(y + 4) \cdot (y - \quad) \;=\; x^2 + x - 12$

Aufgabe 7

Um ein Rasenstück der Breite a und der Länge b soll ein Weg der Breite c angelegt werden.
Für den Term, der den Flächeninhalt des Weges beschreibt, gibt es unterschiedliche Ergebnisse:

Jean-Luc: $2ac + 2bc + 4c^2$

Clara: $2c \cdot (a + b + 2c)$

Moritz: $(a + 2c) \cdot (b + 2c) - ab$

Wer hat die richtige Lösung gefunden? Begründe!

Aufgabe 8

Ergänze die folgenden Gleichungen bzw. forme entsprechend den binomischen Formeln um.

a) $36 \cdot a^2 - \qquad + \qquad = (\qquad 5 \cdot b)^2$

b) $\qquad + 28 \cdot x + \qquad = (7 \cdot x \qquad)^2$

c) $\qquad - 8 \cdot rs + \qquad = (\qquad s)^2$

d) $81 \cdot m^2 - 16 =$

Aufgabe 9

Finde mögliche Fehler und begründe.

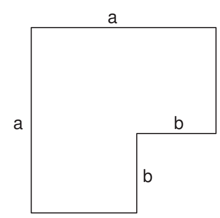
a) $(2 \cdot a - 3 \cdot b)^2 = 4 \cdot a^2 - 9 \cdot b^2$

b) $(3 \cdot x + 5 \cdot y)^2 = 3 \cdot x^2 + 15 \cdot x \cdot y + 5 \cdot y^2$

Aufgabe 10

a) Stelle einen Term für den Umfang u auf und vereinfache soweit wie möglich. Erläutere anschaulich mithilfe der Figur, warum der Umfangsterm unabhängig von der Länge b ist.

b) Gib zwei verschiedene Terme für den Flächeninhalt an. Zeige, dass die Terme gleichwertig sind, und stelle jeweils einen Bezug zu einer binomischen Formel her.

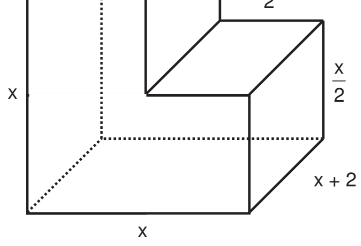


Aufgabe 11

a) Entscheide, welche Terme das Volumen der Figur beschreiben.

b) Erkläre, welche Strategie jeweils angewendet wurde.

c) Finde einen weiteren Term für das Volumen.

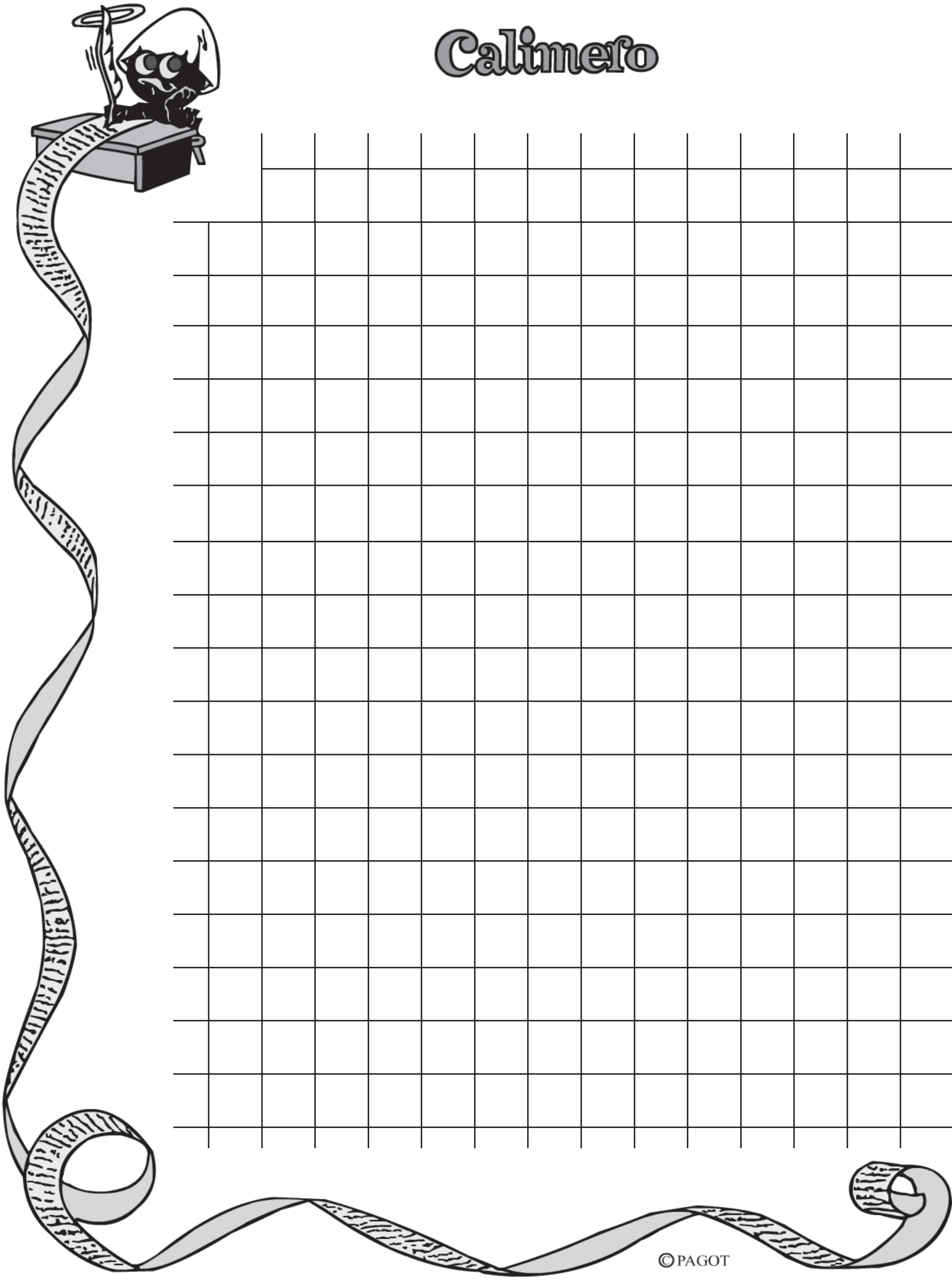


(1) $x^2 \cdot (x+2) - \dfrac{x^2 \cdot (x+2)}{4}$

(2) $3 \cdot \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{x}{2} \cdot (x+2)$

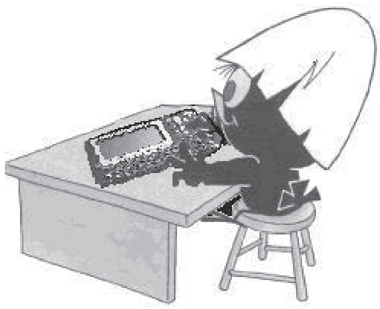
(3) $(x+2) \cdot (x^2 - \dfrac{1}{4} x^2)$

Calimero



C A l i M E R O

Computer-Algebra im Mathematikunterricht
Entdecken, Rechnen, Organisieren



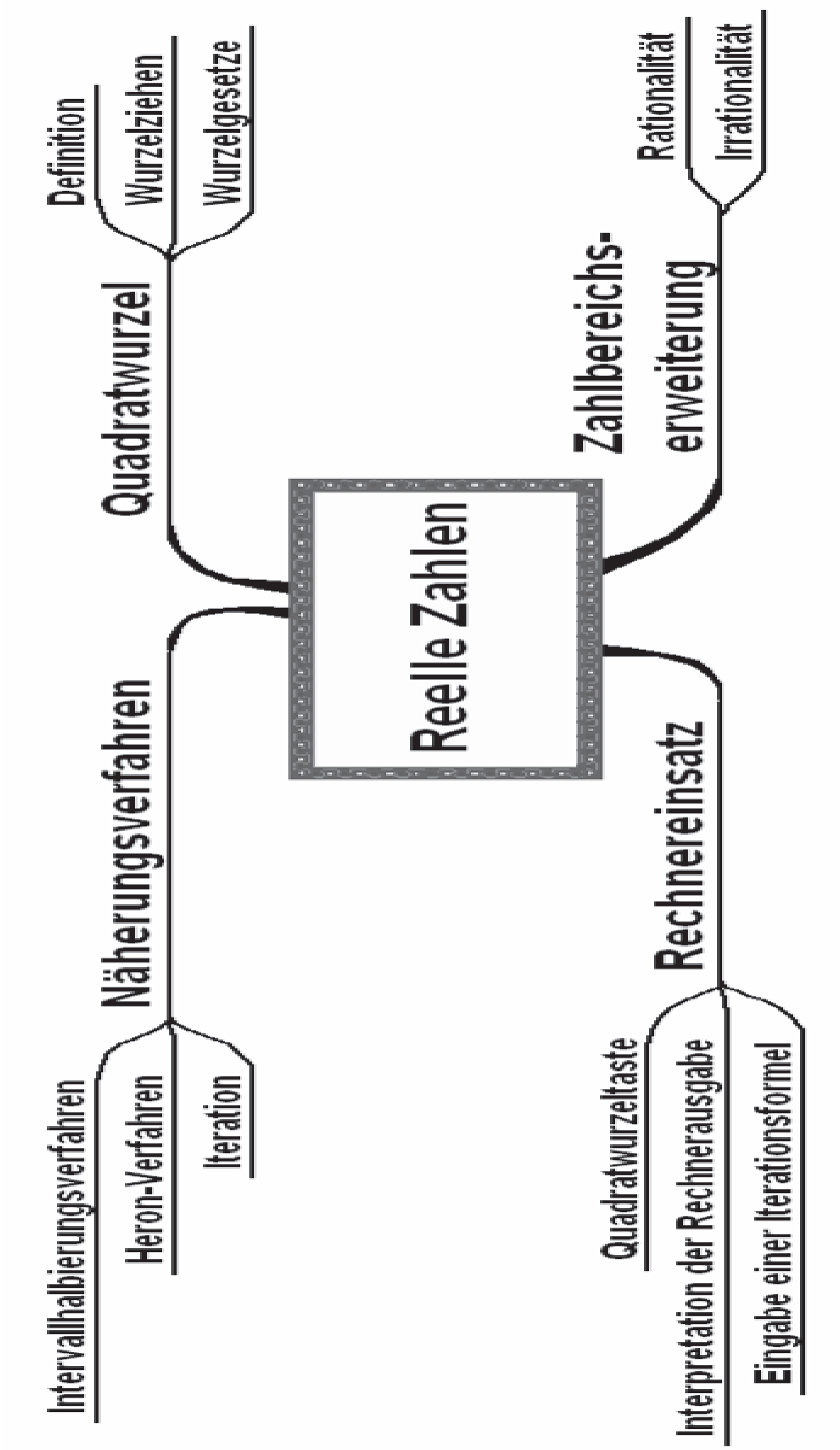
Reelle Zahlen

L e h r e r m a t e r i a l i e n

Überblick über den Unterrichtsverlauf

Stunde		Seite
1	1. Einführung in die Quadratwurzel	40
2 – 4	2. Näherungsverfahren	43
5 – 6	3. Irrationalität	47
7 – 9	4. Rechnen mit Quadratzahlen	48

Mind Map mit Inhalten



Prozessbezogene Kompetenzen

Anhand dieses Unterrichtsmaterials können bei entsprechender methodischer Umsetzung folgende prozessbezogenen Kompetenzen des Kerncurriculums von den Schülerinnen und Schülern schwerpunktmäßig erworben werden:

Mathematisch argumentieren	**Probleme mathematisch lösen**	**Mathematisch modellieren**	**Mathematische Darstellungen verwenden**	**Mit symbolischen, formalen, …**	**kommunizieren**
Vermutungen präzisieren Mathematische Sachverhalte, Regeln, Verfahren und Zusammenhänge erläutern Wissen für mehrschrittige Argumentationen nutzen Lösungswege vergleichen und bewerten	Heurismen anwenden Mathematische Verfahren anwenden Lösungsvielfalt Ergebnisse beurteilen Ursachen für Fehler erklären	Einflussfaktoren finden und beschreiben Verwenden Terme mit Variablen, Gleichungen Ermitteln Lösungen im Modell Interpretieren Ergebnisse	Geometrische Sachverhalte algebraisch darstellen und umgekehrt	Terme mit Variablen Tabellen, Graphen, Terme und Gleichungen nutzen Überschaubare Terme umformen Verfahren zur Lösung linearer Gleichungen Taschenrechner zur Kontrolle	Überlegungen anderen mitteilen Lösungsansätze und Lösungswege präsentieren Überlegungen anderer verstehen, auf Schlüssigkeit überprüfen und darauf eingehen

Inhaltsbezogene Kompetenzen

Mit diesem Unterrichtsmaterial werden folgende inhaltsbezogenen Kompetenzen vermittelt:

Zahlen und Operationen	Größen und Messen	Raum und Form	funktionaler Zusammenhang	Daten und Zufall
Begründen der Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterung von rationalen zu reellen Zahlen an Beispielen Erläutern von Grenzen der Beschreibung reeller Zahlen durch Dezimalbrüche Beschreiben und Anwenden von Näherungsverfahren Nennen kennzeichnender Unterschiede zwischen rationalen und irrationalen Zahlen Kennen der Identität $\sqrt{a^2} = \|a\|$ Ausführen von Rechnungen mit dem eingeführten Rechner und deren Bewertung Lösen einfacher Rechenaufgaben im Bereich der reellen Zahlen Beschreiben von Sachverhalten durch Terme und Gleichungen Veranschaulichen und Interpretieren von Termen Erkennen und Vergleichen der Struktur von Termen Nutzen von Termen und Gleichungen zur mathematischen Argumentation Umformen von Termen mithilfe der Rechengesetze Exemplarisches Begründen und Anwenden der Rechengesetze für Quadratwurzeln	Berechnen und Schätzen des Umfangs und Flächeninhalts geradlinig begrenzter Figuren		Erkennen quadratischer Zusammenhänge als Zuordnungen zwischen Zahlen Darstellen reinquadratischer Funktionen durch Terme und Gleichungen Anwenden der Eigenschaften reinquadratischer Funktionen zur Lösung von Problemen und	

Hinweise zu rechnerspezifischen und rechnerfreien Fertigkeiten

Rechnerfreie Fertigkeiten

Obwohl die Einheit "Reelle Zahlen" mit Verwendung des TC als Werkzeug unterrichtet wird, sollen bestimmte Fertigkeiten von den Schülerinnen und Schülern auch rechnerfrei erworben und beherrscht werden. Diese Fertigkeiten sollen in der Klassenarbeit oder in Kurztests nachgewiesen beziehungsweise abgeprüft werden. Folgende rechnerfreie Fertigkeiten erscheinen uns relevant:
Die Schülerinnen und Schüler sollen:

1. Berechnen von Wurzeln einfacher Quadratzahlen im Kopf, z. B. $\sqrt{81}$, $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{0{,}01}$.
2. Abschätzen von Wurzeln, z. B. $\sqrt{13}$ liegt zwischen 3 und 4, da $3^2 < 13 < 4^2$.
3. Anwenden des Zusammenhangs zwischen Quadrieren und Wurzelziehen, z. B. $\sqrt{3^2}$, $\sqrt{(-1)^2}$.
4. Vereinfachen einfacher Wurzelterme mithilfe der Regeln für Produkt und Quotient, z. B. $\sqrt{3b}$, $\sqrt{12b}$, $\sqrt{\frac{20xy^3}{5xy}}$.

CAS-Fertigkeiten

Im Umgang mit dem TC sollen die Schüler am Ende der Einheit über folgende Fertigkeiten verfügen:

1. Berechnen von Quadratwurzeln
2. Bestimmen von Näherungswerten für Quadratwurzeln mit dem Intervallhalbierungs- und dem Heron-Verfahren
3. Vereinfachen von Wurzeltermen unter Anwendung von "expand", Verständnis für die Rechnerausgabe, bei der Wurzeln teilweise gezogen wurden und Nenner rational gemacht wurden.

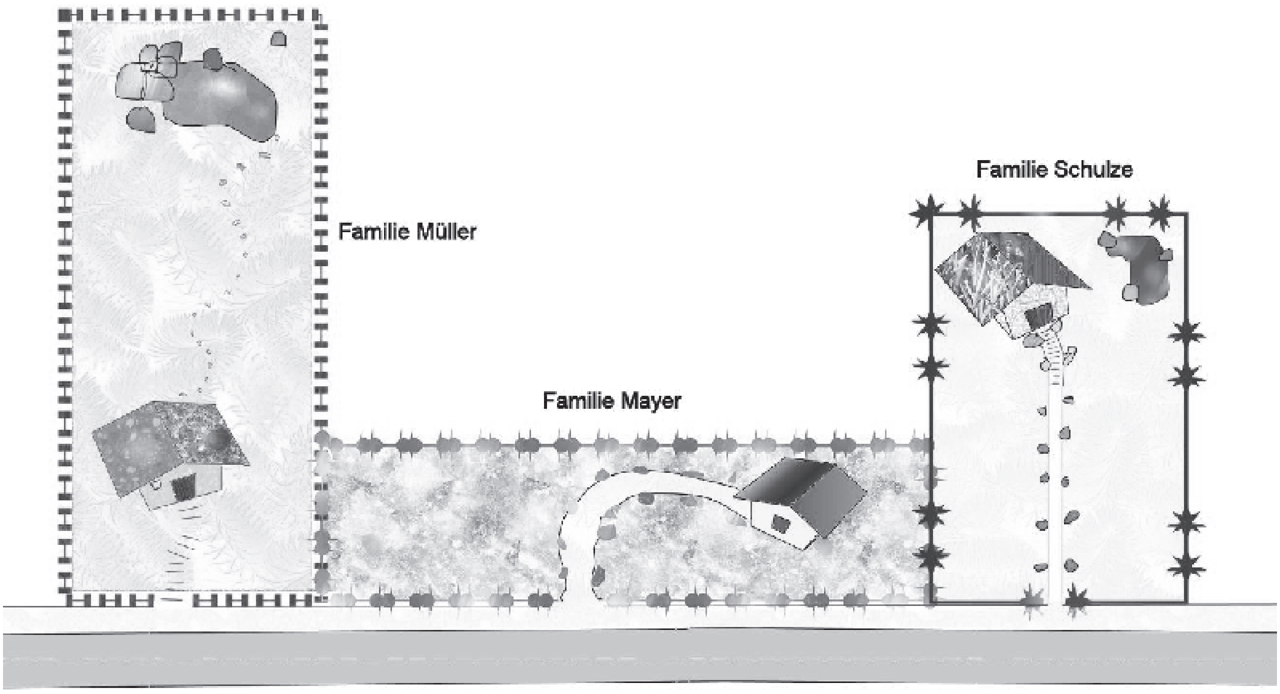
Thema 1.: Einführung der Quadratwurzel	**Dauer:** 1 Stunde
Die Einführung der Quadratwurzel erfolgt an einem anwendungsbezogenen Beispiel. Dabei wird das Heron-Verfahren angebahnt.	
Besondere Materialien/Technologie: LM Folie 1.1 ggf. 1.2; SM Arbeitsblatt 1.1 und 1.2	

Ablauf der Stunde 1:

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: **Auszug aus der Gebührenordnung einer Stadt:** §1 Die Kosten für die Straßenreinigung werden wie folgt berechnet: Jedes Grundstück wird in ein quadratisches Grundstück verwandelt, wobei der Flächeninhalt gleich bleiben soll. Die Gebühren richten sich ausschließlich nach der Seitenlänge des Quadrates. §2 Im Jahr sind pro Meter Quadratseite 32,75 € (einschließlich Mehrwertsteuer) zu entrichten. **Erarbeitung:** Vergleich der Bearbeitungen: Müller: 25 m * 32,75 €/m = 818,75 € Mayer: 17 m * 32,75 €/m = 556,75 € Schulze: 20,22 m * 32,75 €/m = 662,21 € (dieses Ergebnis hängt von der gewählten Genauigkeit für die Quadratseite ab). Für die Berechnung des Grundstücks der Familie Schulze kann neben der Entwicklung eines Probierverfahrens davon ausgegangen werden, dass einige Schülerinnen oder Schüler die Quadratwurzeltaste bereits entdeckt haben.	LM 1.1 als Folie SM 1.1 Aufg. 1	PA Schüler-Lehrer-Gespräch
Sicherung: Der Begriff der Quadratwurzel wird eingeführt. Dabei sollte auf die Eindeutigkeit hingewiesen werden (unterstützend kann der Comic zur Problematisierung eingesetzt werden).	LM 1.2 als Folie, Wissens-speicher	LV
Übungen	SM 1.2, Aufg. 1 – 3	EA / PA

LM 1.1

Jeder Grundstückseigentümer muss für die Straßenreinigung eine Gebühr bezahlen.
Die Grundstücke der Familien haben folgende Maße:
Familie Müller 12,5 m x 50 m, Familie Mayer 34 m x 8,5 m und
Familie Schulze 12,5m x 32,72 m.



Auszug aus der Gebührenordnung einer Stadt:

§1 Die Kosten für die Straßenreinigung werden wie folgt berechnet: Jedes Grundstück wird in ein quadratisches Grundstück verwandelt, wobei der Flächeninhalt gleich bleiben soll. Die Gebühren eines Grundstückes richten sich unabhängig von der Form ausschließlich nach der Seitenlänge eines gleich großen Quadrates.

§2 Im Jahr 2007 sind pro Meter Quadratseite 32,75 € (einschließlich Mehrwertsteuer) zu entrichten

LM 1.2

Nimm Stellung.

Thema 2.: Näherungsverfahren	**Dauer:** ca. 3 Stunden
Es soll die Frage untersucht werden, wie man ohne eine Quadratwurzeltaste Wurzeln berechnen kann. Dabei steht das Heron-Verfahren als Rechner-Algorithmus im Mittelpunkt, aber auch das Intervall-halbierungsverfahren wird thematisiert. Mit dem Heron-Verfahren lernen die Schülerinnen und Schüler die Technik der Iteration kennen. Die Umsetzung der Iteration auf dem TC erfolgt in einfacher Weise im [HOME]-Bildschirm.	
Besondere Materialien/Technologie: LM 2.1; SM 2.1 – 2.3	

Ablauf der Stunde 1:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Die Frage nach der Berechnung einer Quadratwurzel wird gestellt. Dazu wird die Grundidee für das Heron-Verfahren als Comic vorgestellt.	Tafel LM 2.1 als Folie	UG
Erarbeitung: Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten das Arbeitsblatt.		PA
Sicherung: Die Vorgehensweise wird vorgestellt und die Ergebnisse verglichen. Das Gespräch sollte auf zwei Aspekte fokussiert werden: • Es liegt ein sich wiederholender Rechenschritt vor. • Die Entwicklung der Nachkommastellen stabilisiert sich nur scheinbar, es könnte ein nicht abbrechender Dezimalbruch vorliegen (Endziffernbetrachtung).	SM 2.1, Aufg. 1	UG
Hausaufgabe: Wende dieses Verfahren auf die gleiche Weise für die Berechnung von $\sqrt{20}$ an.		

Ablauf der Stunden 2/3:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Die Vorgehensweise beim Heron-Verfahren wird rekapituliert und leitet zu einer systematischen Untersuchung über.	Tafel LM 2.2 als Folie	
Erarbeitung: Anhand der Zeichnungen zur schrittweisen Umwandlung des Rechtecks in ein flächengleiches Quadrat wird die Iterationsformel entwickelt. Die "Iterationsmaschine" soll den Prozess veranschaulichen. Mit der Aufgabe 2 lernen die Schülerinnen und Schüler die entsprechende Rechnersyntax kennen.	SM 2.2, Aufg. 1	LSG
Sicherung/Übung: Die Schülerinnen und Schüler wenden das Verfahren an.	SM 2.2, Aufg. 2, 3	EA / PA
Hausaufgabe: Intervallhalbierungsverfahren im Vergleich zum Heron-Verfahren. Als vorbereitende Aufgabe für die Betrachung der Irrationalität sollte die Aufgabe SM 2.3, Aufg. 2 rechtzeitig gestellt werden.	SM 2.3, Aufg. 1, 2	

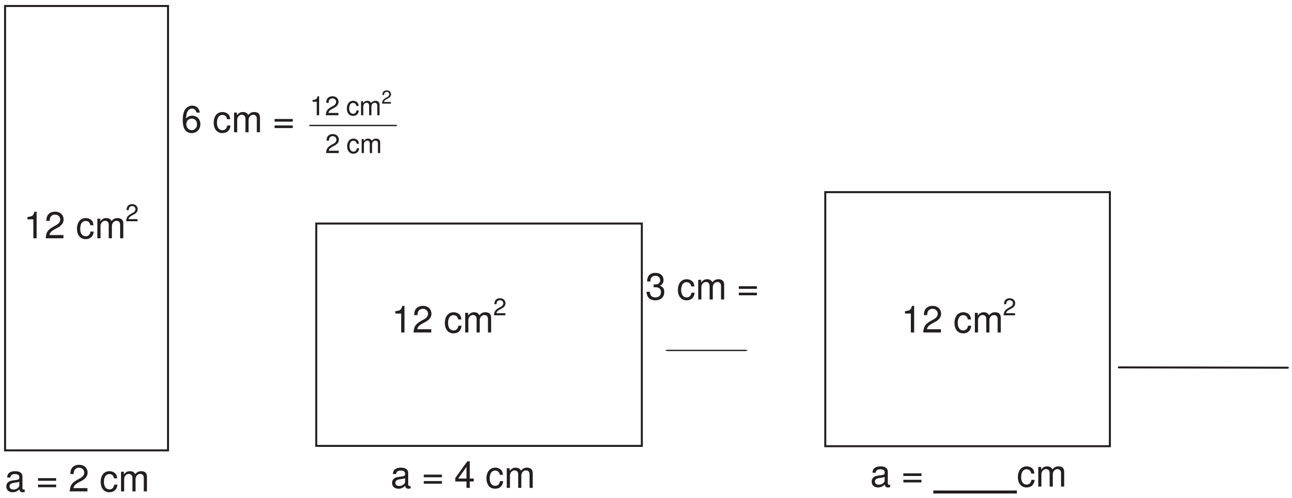
LM 2.1


Ein Rechteck mit Seitenlängen 2cm und 3cm hat den Flächeninhalt 6 cm² und ist schon fast quadratisch.
Ein Rechteck mit dem Mittelwert 2,5 cm als einer Seitenlänge ist noch näher am Quadrat. Seine andere Seitenlänge ist 6 cm² : 2,5 cm = 2,4cm.
Mit dem nächsten Mittelwert aus 2,4cm und 2,5cm erhalten wir bestimmt schon ein Quadrat!
Dessen Seitenlänge ist die gesuchte Wurzel.

LM 2.2

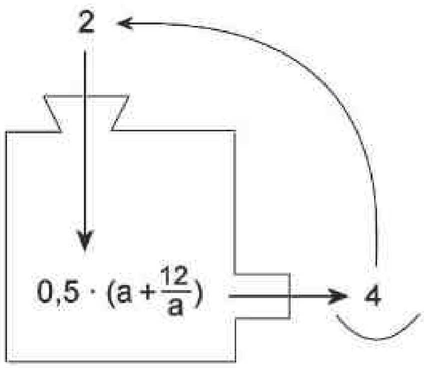
Aufgabe 1 Heron-Verfahren

Du hast gesehen, dass das auf Blatt 1.2.1 durchgeführte Verfahren schon nach wenigen Schritten eine gute Näherung für eine Wurzel liefert. Es trägt den Namen "Heron-Verfahren" und wird bei Taschenrechnern zur näherungsweisen Berechnung von Wurzeln verwendet. Hierzu ist aber eine Formel erforderlich, die du im Folgenden veranschaulichen und nachvollziehen sollst.



____

____



Werte mit der "Iterationsmaschine" berechnen:

____

____

____

____

____

____

Thema 3.: Irrationalität	**Dauer:** 2 Stunden
Die Irrationalität wird altersgemäß betrachtet und ein Bewusstsein für das Vorliegen von "neuartigen" Zahlen geschaffen. Damit wird der bisherige Zahlenbereich erweitert. Die Tiefe der Bearbeitung sollte an die Lerngruppe angepasst werden.	
Besondere Materialien/Technologie: SM 3.1	

Ablauf der Stunden 1/2:

Inhalt	Medien	Kommentar
Hausaufgaben-Besprechung: Ergebnis: Eine Bruchzahl lässt sich in einen abbrechenden oder periodischen Dezimalbruch umwandeln und umgekehrt. Fragestellung: Erhält man beim Berechnen von $\sqrt{6}$ einen abbrechenden Dezimalbruch, dessen Quadrat genau 6 ist? Die Schülerinnen und Schüler stellen Vorüberlegungen an. Als Anregung dazu sollten sie auf die n-te Nachkommastelle hingewiesen werden, die bei der Multiplikation der Zahl mit sich selbst nicht Null werden kann. Damit ist natürlich eine evtl. Periode nicht ausgeschlossen.	Tafel	UG PA
Erarbeitung: Für die Erarbeitung sind zwei Varianten vorgesehen, die beide zum Widerspruchsbeweis führen. Während Variante 1 ein gelenktes Unterrichtsgespräch erfordert, fördert Variante 2 mit einem Beweispuzzle mehr die Schüleraktivität. Variante 1: $\sqrt{6}$ müsste also ein periodischer Dezimalbruch sein und einfacher als Bruch geschrieben werden können: $\sqrt{6}=\frac{a}{b}$, wobei dieser vollständig gekürzt sein soll. Daraus ergäbe sich $6=\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a\cdot a}{b\cdot b}$. Der rechte Bruch ist aber nicht kürzbar, kann also nicht genau 6 sein. Widerspruch! Ergebnis: $\sqrt{6}$ ist keine rationale Zahl, hat also unendlich viele Nachkommastellen, allerdings ohne Periode.	für Variante 2, SM 3.1, Aufg. 1 Tafel	LSG
Sicherung: Benennung als irrationale Zahlen. Rationale Zahlen und irrationale Zahlen bilden die Menge der reellen Zahlen. Dazu bietet es sich an, ein Mengenbild an der Tafel zu entwerfen.	Tafel	LV
Hausaufgabe: Zusätzliche Aufgabe: Schreibe einen Zeitungsartikel zu dem Thema: "Die Klasse 8x entdeckt neue Zahlen!"	Wissens-speicher SM 3.1, Aufg. 2, 3	

Thema 4.: Rechnen mit Quadratwurzeln	**Dauer:** ca. 3 Stunden
Die Schülerinnen und Schüler entdecken, wie man mit Wurzeln rechnet. Dazu lernen sie Regeln kennen und formen Terme um, die Wurzeln enthalten.	
Besondere Materialien/Technologie: SM 4.1	

Ablauf der Stunden 1 – 3:

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Die Schülerinnen und Schüler werden mit richtigen und falschen Rechnungen mit Wurzeln konfrontiert.	SM 4.1, Aufg. 1	EA / PA
Erarbeitung: Mit dem TC werden diese Rechnungen überpüft (MODE-Einstellung AUTO oder EXACT) und die erfolgten automatischen Umformungen des TC analysiert. (Hinweis: Beim Umformen von Wurzeltermen mit dem TC taucht unweigerlich teilweises Wurzelziehen und Rationalmachen des Nenners auf.)		EA / PA
Sicherung: Formulierung der Wurzelgesetze	Wissens- speicher	UG
Übungen	SM 4.1, Aufg. 2 – 6	PA

5. Wissensspeicher

Quadratwurzel

Unter einer **Quadratwurzel** aus a (kurz: **Wurzel** aus a) versteht man diejenige nichtnegative Zahl, die mit sich selbst multipliziert die Zahl a ergibt.

Schreibweise: $\sqrt{a}$.

Wurzelzeichen

$\sqrt{a}$

Radikand

Die Zahl unter dem Wurzelzeichen heißt **Radikand**.

Das Bestimmen der Quadratwurzel heißt **Wurzelziehen** (**Radizieren**).

Beachte: Die Quadratwurzel einer Zahl ungleich Null ist immer positiv.

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a\,;\ a \geq 0$

$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$

Beispiele:

$\sqrt{144} = 12$, denn $12^2 = 144$ und $12 \geq 0$

$\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$, denn $0{,}2^2 = 0{,}04$ und $0{,}2 \geq 0$

$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$, denn $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ und $\frac{3}{5} \geq 0$

$\sqrt{0} = 0$, denn $0^2 = 0$ und $0 \geq 0$

Das Heron-Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung von $\sqrt{a}$.

Beispiel: $\sqrt{8}$

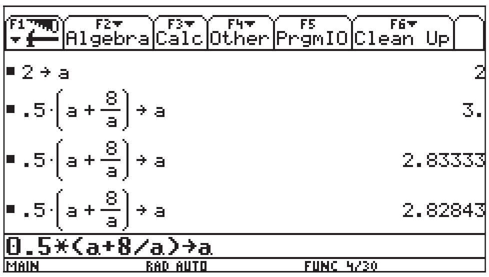
Breite x	Länge $\frac{8}{x}$	Mittelwert
2	4	3
3	2,66667	2,83333
2,83333	2,82353	2,82843
2,82843	2,82842	2,82843
2,82842	2,82843	2,82843

Geometrische Darstellung des Heron-Verfahrens:

1. Starte mit einem Rechteck mit dem Flächeninhalt A = 8 (FE), z. B. mit der Breite 2 (LE) und Länge 4 (LE).
2. Verwandle das Rechteck in ein flächengleiches Rechteck. Neue Breite: Mittelwert aus "alter" Breite und Länge. Neue Länge: Flächeninhalt dividiert durch neue Breite
3. Verwandle dieses Rechteck erneut in ein flächengleiches Rechteck wie in 2.

   usw.

Die Zahlen in der Tabelle sind gerundet. Es wurde aber mit der maximalen Rechnergenauigkeit weiter gerechnet.



Eine Möglichkeit, mit dem Voyage 200 das Heron-Verfahren geschickt umzusetzen.

Intervallhalbierungsverfahren

Das Intervallhalbierungsverfahren ist ein weiteres Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung von $\sqrt{a}$.
Beispiel: $\sqrt{8}$

linke Intervallgrenze x	rechte Intervallgrenze y	Mittelwert aus x und y	Wo liegt $\sqrt{8}$?
2	3	2,5	$2{,}5^2 = 6{,}25 < 8$
2,5	3	2,75	$2{,}75^2 = 7{,}5625 < 8$
2,75	3	2,875	$2{,}875^2 \approx 8{,}27 > 8$
2,75	2,875	2,8125	$2{,}8125^2 \approx 7{,}91 < 8$
2,8125	2,875	2,84375	$2{,}84375^2 \approx 8{,}09 > 8$

Man benötigt im Vergleich zum Heron-Verfahren viel mehr Iterationsschritte für eine Genauigkeit von z. B. vier Dezimalstellen.

Reelle Zahlen

- **Rationale Zahlen**

  sind Zahlen, die sich mit Brüchen angeben lassen. Gibt man sie als Dezimalbrüche an, so sind sie abbrechend oder periodisch.

  $0{,}5 \;;\; 3 \;;\; -7 \;;\; \frac{4}{9} \;;\; 0{,}\overline{7} \;;\; 0{,}12\overline{45}$

- **Irrationale Zahlen**

  lassen sich nicht als Bruch darstellen. Als Dezimalbruch geschrieben sind sie nicht abbrechend und auch nicht periodisch.

  $\sqrt{2} \;;\; \sqrt{13} \;;\; 4+\sqrt{6} \;;\; 0{,}101001000100001\ldots$

Wurzelgesetze

Summen und Wurzeln

$2\sqrt{8}+3\sqrt{8}=(2+3)\sqrt{8}=5\sqrt{8}$

Für $x \geq 0$ gilt das Distributivgesetz:

$a\sqrt{x}+b\sqrt{x}=(a+b)\sqrt{x}$

Produkte und Wurzeln

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$

Für $x \geq 0$ und $y \geq 0$ gilt:

$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=\sqrt{x\cdot y}$

Quotienten und Wurzeln

$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{24}{6}}=\sqrt{4}=2$

Für $x \geq 0$ und $y > 0$ gilt:

$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{\frac{x}{y}}$

Teilweises Wurzelziehen

$\sqrt{32}=\sqrt{16\cdot 2}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

Für $x \geq 0$ gilt:

$\sqrt{16\cdot x}=4\cdot\sqrt{x}$

Rationalmachen des Nenners

$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$

6. Selbsteinschätzung

Schätze deine Kenntnisse ein und mache ein Kreuz in der entsprechenden Spalte.

Ich kann	**ich bin sicher**	**ich muss noch üben**	**ich brauche Hilfe**
• von einem Quadrat bei gegebenem Flächeninhalt die Seitenlänge abschätzen $A = 300\ cm^2$, dann ist $17\ cm < a < 18\ cm$			
• ein Rechteck schrittweise in ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt umwandeln			
• Wurzeln mit einem Näherungsverfahren berechnen und in einer Tabelle darstellen (Heron- oder Intervallhalbierungsverfahren)			
• Wurzeln mit dem TC berechnen			
• über eine Endziffernbetrachtung begründen, dass bestimmte Wurzeln wie z. B. $\sqrt{2}$ irrationale Zahlen sind			
• Beispiele für irrationale und rationale Zahlen angeben sowie begründen			
• erklären, was ein Widerspruchsbeweis ist			
• Wurzelterme mithilfe der Wurzelgesetze vereinfachen			
• Umformungen von Wurzeltermen mithilfe der Wurzelgesetze begründen			

7. Rechnerfreie Aufgaben

Aufgabe 1

a) Ordne der Größe nach: $\sqrt{12};\ 3{,}4;\ \sqrt{10};\ \frac{7}{2};\ 4$.

b) Vereinfache:

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$ $\qquad$ $5\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$ $\qquad$ $\sqrt{2}\cdot\left(2+\sqrt{8}\right)$

Aufgabe 2

Fasse soweit wie mögliche zusammen:
$7\sqrt{ax}+3\sqrt{bx}+2\sqrt{ax}$ $\qquad$ $9\sqrt{7}-6+3\sqrt{7}+3-\sqrt{7}$.

Aufgabe 3

a) Berechne: $\sqrt{72}:\sqrt{2}$.

b) Die Seiten eines Quadrates wurden verdoppelt. Wie verändert sich der Umfang?

c) Gib die beiden ganzen Zahlen an, zwischen denen $\sqrt{6}$ liegt.

Aufgabe 4

Berechne $\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{20}+\sqrt{5}\right)$

.

8. Klassenarbeitsaufgaben

Hinweis: Die folgenden Aufgaben sollten mit Aufgaben aus einem anderen Themenbereich kombiniert werden.

Aufgabe 1

Bestimme die Seitenlänge eines quadratischen Grundstücks der Größe

a) 441 m² b) 401 m².

Aufgabe 2

Begründe, dass $\sqrt{5}$ kein abbrechender Dezimalbruch ist.

Aufgabe 3

Führe zwei Schritte zur Verbesserung eines ganzzahligen Näherungswertes für $\sqrt{8}$ mit einem Verfahren deiner Wahl durch.

Aufgabe 4

Vereinfache so weit wie möglich. Achte darauf, dass zum Schluss keine Wurzeln im Nenner enthalten sind.

a) $\sqrt{800}$ b) $3\cdot\sqrt{75}+2\cdot\sqrt{48}+\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3p}\cdot\sqrt{6pq}\cdot\sqrt{8r}$

d) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ e) $\dfrac{4}{3\cdot\sqrt{8}}$ f) $\dfrac{\sqrt{13}}{5-\sqrt{13}}$ g) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$ h) $\dfrac{\sqrt{18y^3}}{\sqrt{2y}}$

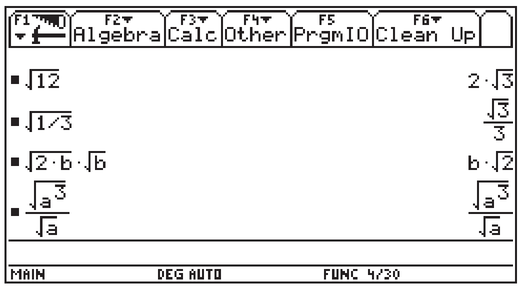
Aufgabe 5

Schreibe unter ein Wurzelzeichen.

a) $2\cdot\sqrt{7}$ b) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ c) $a^3\cdot\sqrt{b}$

Aufgabe 6

Erkläre die nebenstehend vom TC durchgeführten Umformungen.



Aufgabe 7

Entscheide, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:

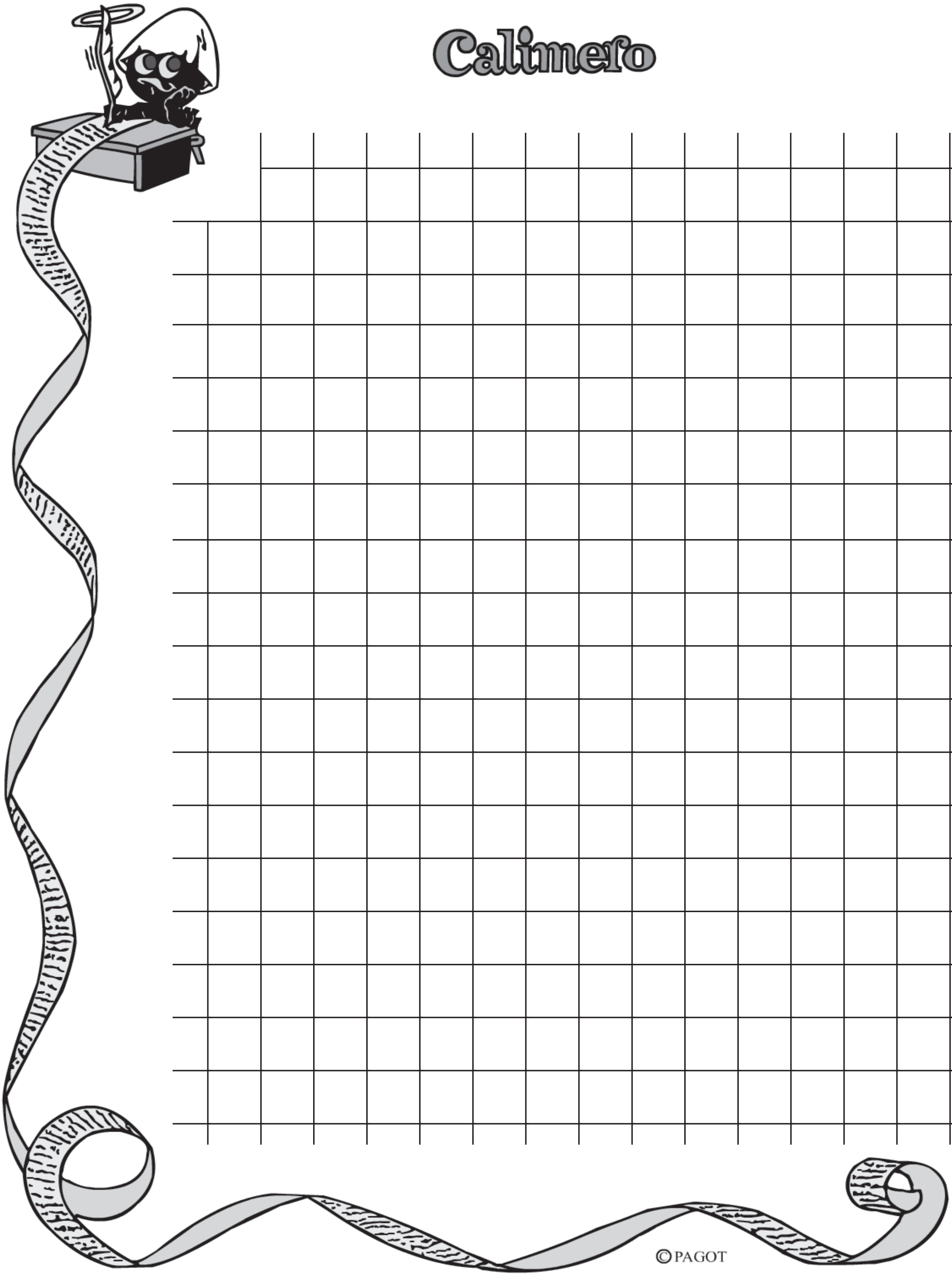
$(1+\sqrt{2})\cdot(1-\sqrt{2})$ ist eine irrationale Zahl.

Aufgabe 8

Entscheide, welche der folgenden Zahlen eine rationale bzw. irrationale Zahl ist und begründe.

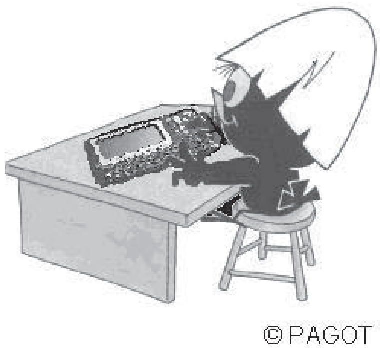
a) $\sqrt{26}$ b) 0,45454545... c) $\sqrt{0{,}16}$ d) $\dfrac{7}{5}$

Calimero



C A l i M E R O

Computer-Algebra im Mathematikunterricht
Entdecken, Rechnen, Organisieren



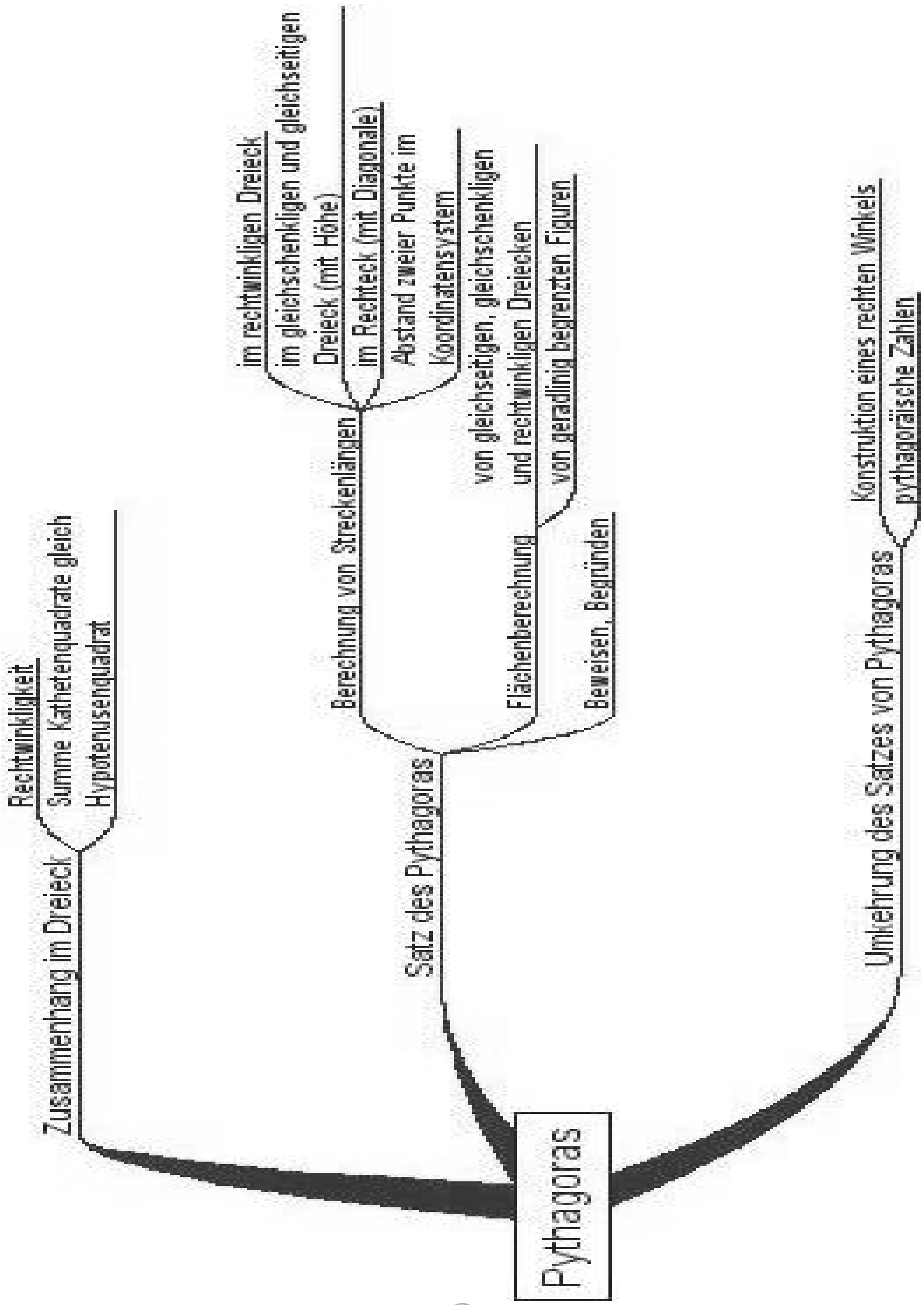
Satz von Pythagoras

L e h r e r m a t e r i a l i e n

Überblick über den Unterrichtsverlauf

Stunde		Seite
1 – 3	1. Erarbeitung des Satzes von Pythagoras	61
4 – 6	2. Anwendungen des Satzes von Pythagoras	63
7 – 9	3. Umkehrung des Satzes von Pythagoras	64

Mind Map mit Inhalten



Prozessbezogene Kompetenzen

Anhand dieses Unterrichtsmaterials können bei entsprechender methodischer Umsetzung folgende prozessbezogenen Kompetenzen des Kerncurriculums von den Schülerinnen und Schülern schwerpunktmäßig erworben werden:

Mathematisch argumentieren	Probleme mathematisch lösen	Mathematisch modellieren	Mathematische Darstellungen verwenden	Mit symbolischen, formalen, …	kommunizieren
präzisieren Vermutungen und machen sie einer mathematischen Überprüfung zugänglich, auch unter Verwendung geeigneter Medien beschaffen sich notwendige Informationen für mathematische Argumentationen und bewerten diese erläutern mathematische Sachverhalte, Begriffe, Regeln, Verfahren und Zusammenhänge unter Zuhilfenahme formaler Darstellungen nutzen mathematisches Wissen für Begründungen, auch in mehrschrittigen Argumentationen bauen mehrschrittige Argumentationsketten auf und/oder analysieren diese finden Begründungen durch Zurückführen auf Bekanntes, Einführen von Hilfsgrößen oder Hilfslinien vergleichen und bewerten verschiedene Lösungsansätze und Lösungswege	erfassen inner- und außermathematische Problemstellungen und beschaffen die zu einer Problemlösung noch fehlenden Informationen wenden heuristische Strategien an nutzen Darstellungsformen wie Terme und Gleichungen zur Problemlösung wenden algebraische, numerische, grafische Verfahren oder geometrische Konstruktionen zur Problemlösung an ziehen die Möglichkeit mehrerer Lösungen in Betracht und überprüfen diese beurteilen ihre Ergebnisse, vergleichen und bewerten Lösungswege und Problemlösestrategien	wählen Modelle zur Beschreibung überschaubarer Realsituationen und begründen ihre Wahl verwenden Terme zur Ermittlung von Lösungen im mathematischen Modell	stellen funktionale Zusammenhänge durch Tabellen, Graphen oder Terme dar, auch unter Verwendung des eingeführten Taschenrechners, interpretieren und nutzen solche Darstellungen stellen geometrische Sachverhalte algebraisch dar und umgekehrt	erfassen und beschreiben Zuordnungen mit Variablen und Termen können überschaubare Terme mit Variablen zusammenfassen, ausmultiplizieren und ausklammern, um mathematische Probleme zu lösen nutzen den eingeführten Taschenrechner zur Kontrolle nutzen den eingeführten Taschenrechner und Geometriesoftware zur Darstellung und Erkundung mathematischer Zusammenhänge sowie zur Bestimmung von Ergebnissen nutzen den eingeführten Taschenrechner beim Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsformen nutzen Lexika, Schulbücher Printmedien und elektronische Medien zur selbstständigen Informationsbeschaffung	teilen ihre Überlegungen anderen verständlich mit, wobei sie zunehmend die Fachsprache benutzen präsentieren Lösungsansätze und Lösungswege, auch unter Verwendung geeigneter Medien verstehen Überlegungen von anderen zu mathematischen Inhalten, überprüfen diese auf Schlüssigkeit und gehen darauf ein strukturieren, interpretieren, analysieren und bewerten Daten und Informationen aus Texten und mathematikhaltigen Darstellungen organisieren die Arbeit im Team selbstständig

Inhaltsbezogene Kompetenzen

Mit diesem Unterrichtsmaterial werden folgende inhaltsbezogenen Kompetenzen vermittelt:

Zahlen und Operationen	Größen und Messen	Raum und Form	funktionaler Zusammenhang	Daten und Zufall
kennen die Identität $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$ führen Rechnungen mit dem eingeführten Taschenrechner aus und bewerten die Ergebnisse lösen einfache Rechenaufgaben im Bereich der reellen Zahlen beschreiben Sachverhalte durch Terme und Gleichungen veranschaulichen und interpretieren Terme erkennen und vergleichen die Struktur von Termen nutzen Terme und Gleichungen zur mathematischen Argumentation modellieren inner- und außermathematische Problemsituationen mithilfe von Termen und Gleichungen formen Terme mithilfe der Rechengesetze um lösen Gleichungen in Sachzusammenhängen durch Probieren, numerisch und grafisch unter Verwendung des eingeführten Taschenrechners nutzen beim Gleichungslösen die Probe zur Kontrolle und beurteilen die Ergebnisse	berechnen Streckenlängen mithilfe des Satzes von Pythagoras schätzen und berechnen Umfang und Flächeninhalt geradlinig begrenzter Figuren	wenden den Satz von Pythagoras bei Konstruktionen, Berechnungen und Beweisen an beschreiben und begründen Symmetrie, Kongruenz, Lagebeziehungen geometrischer Objekte und nutzen diese Eigenschaften im Rahmen des Problemlösens zur Analyse von Sachzusammenhängen		

Hinweise zu rechnerspezifischen und rechnerfreien Fertigkeiten

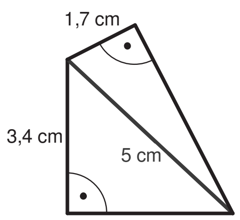
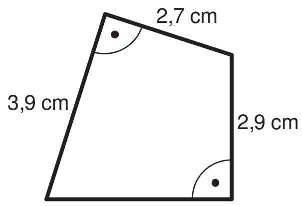
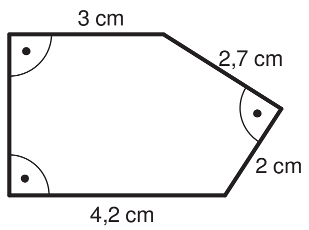
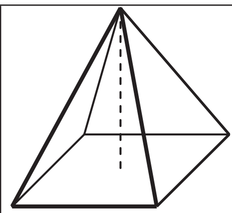
Rechnerfreie Fertigkeiten

Obwohl die Einheit "Satz von Pythagoras" mit Verwendung des TC als Werkzeug unterrichtet wird, sollen bestimmte Fertigkeiten von den Schülerinnen und Schülern auch rechnerfrei erworben und beherrscht werden. Diese Fertigkeiten sollen in der Klassenarbeit oder in Kurztests nachgewiesen beziehungsweise abgeprüft werden. Folgende rechnerfreie Fertigkeiten erscheinen uns relevant:

Die Schülerinnen und Schüler sollen:

1. In einfachen Fällen die Gleichung zum Satz von Pythagoras nach einer Größe umstellen.
2. Flächen in rechtwinklige Teildreiecke zerlegen, um den Satz von Pythagoras anwenden zu können.
3. In Körpern rechtwinklige Dreiecke erkennen, um den Satz von Pythagoras anwenden zu können.

Beispiele:

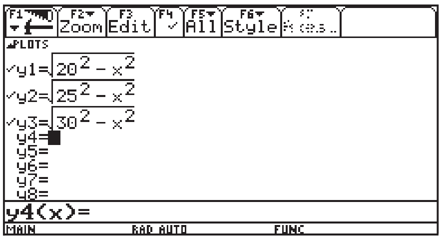
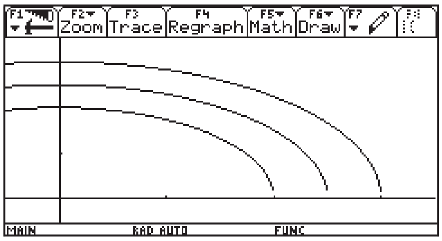
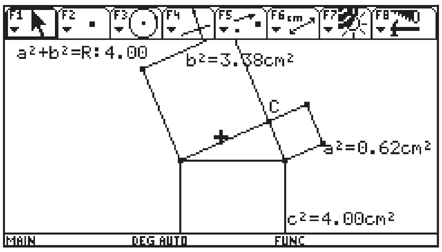
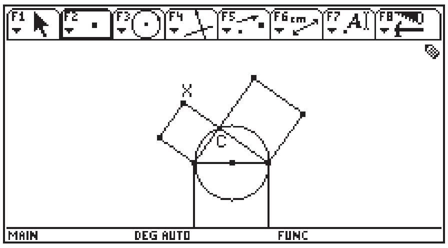
1.	In einem rechtwinkligen Dreieck mit dem rechten Winkel bei Punkt C ist die Seite a = 6 cm und die Seite c = 10 cm lang. Berechne die Länge der Seite b.	
2.	Berechne jeweils den Flächeninhalt:   	
3.	Eine Pyramide hat eine quadratische Grundfläche. Die Pyramide ist 12 m hoch und die Grundkante hat eine Länge von 6 m. Berechne die Länge der Seitenkante.	

CAS-Fertigkeiten

Im Umgang mit dem TC sollen die Schüler am Ende der Einheit über folgende Fertigkeiten verfügen:

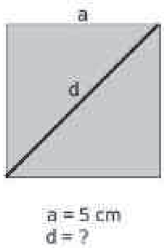
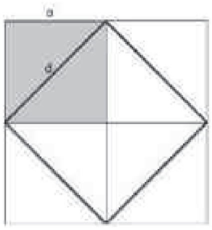
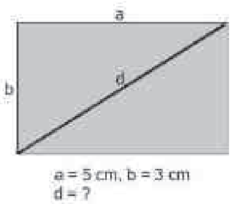
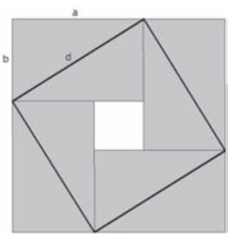
1. Gleichungen in den TC eingeben, mithilfe des Rechners lösen und das Ergebnis nachvollziehen können.
2. Abstandformeln als Makros definieren und diese zur Berechnung nutzen. Damit wird schrittweise die Fertigkeit weiterentwickelt, Funktionen mithilfe eines Terms zu definieren und zu verwenden.
3. Verständig mit Kreisgleichungen auf dem Rechner umgehen und diese für experimentelle Untersuchungen nutzen.
4. [WINDOW]-Einstellungen situationsbezogen vornehmen können.
5. Dynamische Geometriesoftware für Entdeckungen nutzen.

Beispiele:

1.	Solve$(s=2\cdot\sqrt{r^2-a^2}$,a)	
2.	$\sqrt{(6370+h)^2-6370^2}$ → w(h)	
3.	$\sqrt{36-x^2}$ → y1(x)	
4.		
5.		

Thema 1.: Erarbeitung des Satzes von Pythagoras	**Dauer:** 3 Stunden
Über die Frage nach der Diagonalenlänge im Rechteck wird mit einer Zerlegungsfigur eine Formel ("Diagonalenformel") begründet, die bekanntermaßen den Satz von Pythagoras impliziert.	
Besondere Materialien / Technologie: LM 1.1 bis LM 1.3; SM 1.1 und 1.2	

Ablauf der Stunde 1:

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg:  Impuls: Wie berechnet man die Diagonalenlänge im Quadrat, wenn man die Seitenlänge kennt? **Ergebnis:**  "Das Diagonalenquadrat ist halb so groß wie das Vierfache der Quadratfläche." Dies auch als Formel verschriftlichen.	LM 1.1 als Folie SM 1.1, Aufg. 1	LSG Von der Folie nur erstes graues Quadrat zeigen, 3 Minuten "Grübelphase". Dann Lösung im LSG, hierbei Folie nach Bedarf “schrittweise” aufdecken. Evtl. Flächenbeziehung auch an einer Serviette verdeutlichen oder Anwendungssituationen wie die Berechnung der Diagonalenlänge beim Fernsehschirm verwenden.
Vertiefung:  Impuls: Versuche, analog die Diagonale d eines Rechtecks mit den Seiten a und b zu bestimmen. Schneide dazu die Rechtecke aus der Folie aus und lege geschickt zusammen.	SM 1.1, Aufg. 2 LM 1.2. als Folie	Arbeitsgleiche GA
Vorstellung und Diskussion:  Ergebnisse folgen möglichst diesen Zerlegungen: $d^2 = (a + b)^2 - 2ab$ oder $d^2 = 2ab + (b - a)^2$	OHP LM 1.3 als Folie	UG Je Gruppe eine Folie mit Rechtecken vorsehen
Bilanz: Finde eine Formel für d.	Tafel	UG Je nach Zeitfortschritt auch in der nächsten Stunde.
Hausaufgabe: Quadrate addieren	SM 1.1, Aufg. 3	

Ablauf der Stunde 2:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Präsentation der Hausaufgabe Falls noch offen: Fertigstellung der Vertiefungsaufgabe, dann Vereinheitlichung des Ergebnisses als "Diagonalenformel": $d = \sqrt{a^2 + b^2}$	Tafel	UG Falls der Satz von Pythagoras Schülern bekannt ist, diesen als Dreiecksbild notieren.
Anwendungen: Rechnerische Bestimmung von Abständen	TC SM 1.1: Aufg. 4	Minimum: Aufgabenteile a und b Teil d als Differenzierung
Hausaufgabe	SM 1.2 Aufg. 5/6	

Ablauf der Stunde 3:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Formulierung des Satzes von Pythagoras (falls in vorangegangener Stunde noch nicht geschehen) Reduzierung der Bezugsfigur vom Rechteck mit Diagonale auf ein rechtwinkliges Dreieck und Namensgebung Satz von Pythagoras. Dabei werden die Begriffe "Hypotenuse" und "Kathete" eingeführt.	Tafel	LV Wird der Satz auf einem Poster notiert, kann er dauerhaft ausgehängt werden.
Übungen: Aufgaben zum flexiblen Umgang mit dem Satz von Pythagoras	SM 1.2 Aufg. 7 – 9	
Hausaufgabe	SM 1.2; Aufg. 7 – 9 SM 1.3	Die restlichen Aufgaben werden als Hausaufgabe gestellt. SM 1.1.3 dient der möglichen Erweiterung.

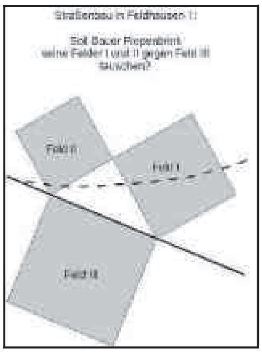
Thema 2.: Anwendungen des Satzes von Pythagoras	**Dauer:** 3 Stunden
Die Anwendung der Formel wird variationsreich an Flächen- und Raumfiguren geübt. Als Arbeitsform bietet sich eine Wochenplanarbeit an.	
Besondere Materialien / Technologie: TC; Lehrermaterial LM 2.1 (Lösungen zur Wochenplanarbeit); Wochenplanmaterialien SM 2.1 bis SM 2.8, Körpermodelle: Quader und quadratische Pyramide	

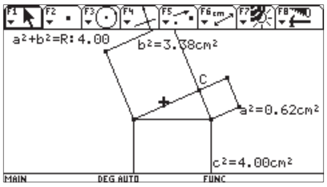
Ablauf der Stunden 1 – 3:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einführung zu Beginn der ersten Stunde: a) Lehrerinformation zur Orientierung der Schüler b) Austeilung der Arbeitsblätter (Aufgabenstellung Wochenplanarbeit, Aufgabensammlung, Logbuch) c) Bereitstellung von Modellen und Lösungshilfen d) Organisatorische Hinweise Es empfiehlt sich, zu Beginn und Ende jeder Stunde im Plenum eine kurze Verständigung und Reflexion vorzunehmen. Zum Abschluss der Wochenplanarbeit müssen die Arbeitsergebnisse vom Lehrer kontrolliert werden (siehe Schülerblatt Aufgabenstellung, Stichwort: Kontrolle)	SM 2.1 bis 2.8	Falls der Lerngruppe Wochenplanarbeit nicht vertraut ist, muss eine Einführung in die Methode gegeben werden. Das Schülerblatt "Logbuch" stellt ein Mini-Lerntagebuch und Arbeitskontrollbogen dar. Es kann natürlich auch in anderer Form – kürzer oder ausführlicher – konzipiert werden.
Arbeit am Wochenplan	neben den genannten Materi-alien Lösungen (LM 2.1) bereit halten	
Ergebnissicherung am Ende der dritten Stunde: Feedback von Schülerseite zu inhaltlichen Problemen und zur Arbeitsform. Feedback des Lehrers zur Aufgabenbearbeitung und zum Arbeitsverhalten. Eventuell Besprechung besonderer inhaltlicher Fragen im Plenum		Kann auch zu Beginn der nächsten Stunde erfolgen.

Thema 3.: Umkehrung des Satzes von Pythagoras	**Dauer:** 3 Stunden
Die Umkehrung des Satzes wird empirisch über dynamisches Experimentieren mit der Pythagorasfigur erschlossen und im Kontext der Überprüfung von Rechtwinkligkeit und der Suche nach pythagoräischen Zahlentripeln verwendet. Das Aufgabenmaterial stellt vielfältige Vernetzungen zu anderen Themen und Fertigkeiten her. Es sollen auch historische Bezüge vorgestellt werden. Dieser Teil kann bei Zeitnot auf die erste Stunde und eine Übungsstunde (2. Std) beschränkt werden.	
Besondere Materialien / Technologie: TC; Überspielkabel und Dateien pyth1 und pyth2; Schülermaterial SM 3.1	

Ablauf der Stunde 1:

<table>
<tr><th>Inhalt</th><th>Medien</th><th>Kommentar</th></tr>
<tr><td>Einführung:
Straßenbau in Feldhausen: Soll der Bauer seine Felder I und II gegen Feld III eintauschen?</td><td>Folie
LM 3.1</td><td>UG</td></tr>
<tr><td>

Folie "Piepenbrink": Nachmessen und -rechnen ergibt:
I + II ≈ III
Folie "Plattfuß": dito
I + II < III (der Bauer bekommt mehr)
Folie "Großmaul": dito
I + II > III (der Bauer verliert Land)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Erarbeitung:


Finde alle Dreiecke, für die $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.
Verändere hierzu die Position von Punkt C.</td><td>TC mit Datei pyth1</td><td>PA
Vom Lehrerrechner auf die Schülerrechner überspielen</td></tr>
<tr><td>Entdeckung:
Wenn die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypothenusenquadrat ist, dann liegt C auf einem Halbkreis.
Mit dem Satz des Thales folgt dann: Das Dreieck ist rechtwinklig.
Zum Beispiel:
<table>
<tr><th>a</th><th>b</th><th>c</th></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>30</td><td>40</td><td>50</td></tr>
<tr><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr>
</table>
Begründung (optional): durch Widerspruchsbeweis</td><td>Tafel

Tafel
(Vorbereitung der Hausaufgabe)</td><td>UG

LV (optional)</td></tr>
<tr><td>Hausaufgabe</td><td>SM 3.1
Aufg.
1 – 3</td><td></td></tr>
</table>

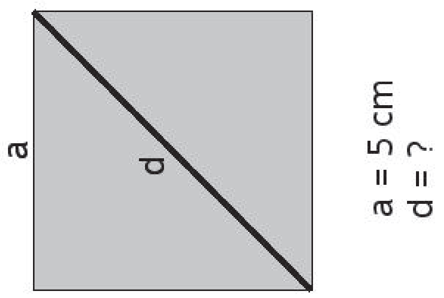
Ablauf der Stunde 2:

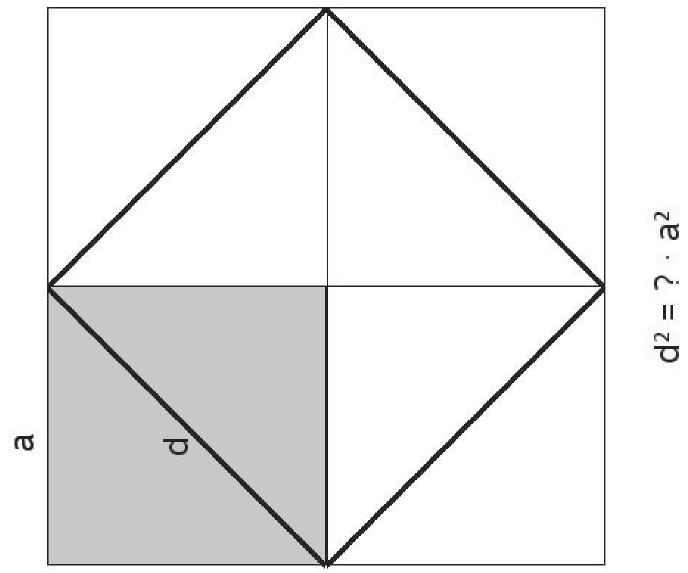
Inhalt	Medien	Kommentar
Übungen: in Form einer arbeitsteiligen GA Material (vom Lehrer vorzubereiten): a) Für G1: Legefiguren (LM 1.3.2) in Gruppenanzahl kopieren. Ausschneiden auch in den Gruppen möglich; A5 Handfolie b) Für G2: ca. 4 m Paketschnur, Tafeldreieck, A5 Handfolie c) Für G3: TC; A5 Handfolie d) Für G4: A5 Handfolie e) Für G5: Datei pyth2; A5 Handfolie f) Für G 6: Zollstock; A5 Handfolie	SM 3.1 und 3.2: Aufgaben G1 bis G6 LM 3.2 Leerfolie Datei pyth2	Eine eher leistungshomogene Gruppenzusammensetzung sollte vorgegeben werden. Ca. 20 Min. Arbeitszeit
Erarbeitung: Regeln für eine "gute Präsentation"		Ein Kriterienkatalog für die Erarbeitung und Beurteilung einer "guten" Präsentation ist anhand einschlägigen Materials zu erarbeiten oder – falls schon vorhanden – zu nutzen.
Hausaufgabe: Eigene Aufgabe übersichtlich im Heft aufschreiben.		

Ablauf der Stunde 3:

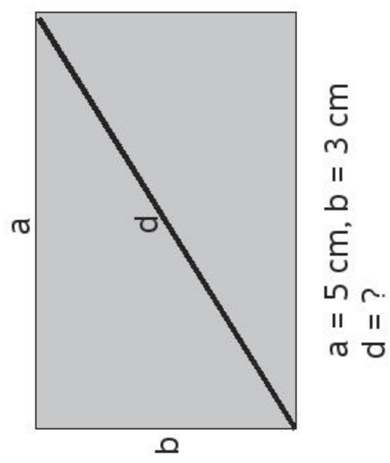
Inhalt	Medien	Kommentar
Präsentationen der Gruppenarbeitsergebnisse	OHP und Display	Hinweise für eine "gute" Präsentation sind zu beachten.
Beurteilung der Präsentationen		UG
Optionaler Rechercheauftrag: • Feldmessung in Ägypten • Katheten- und Höhensatz • Biografie Pythagoras		Evtl. zusätzliche Stunde, in der die Ergebnisse vorgestellt werden.
Hausaufgabe: Was wäre, wenn es keine rechten Winkel gäbe?		

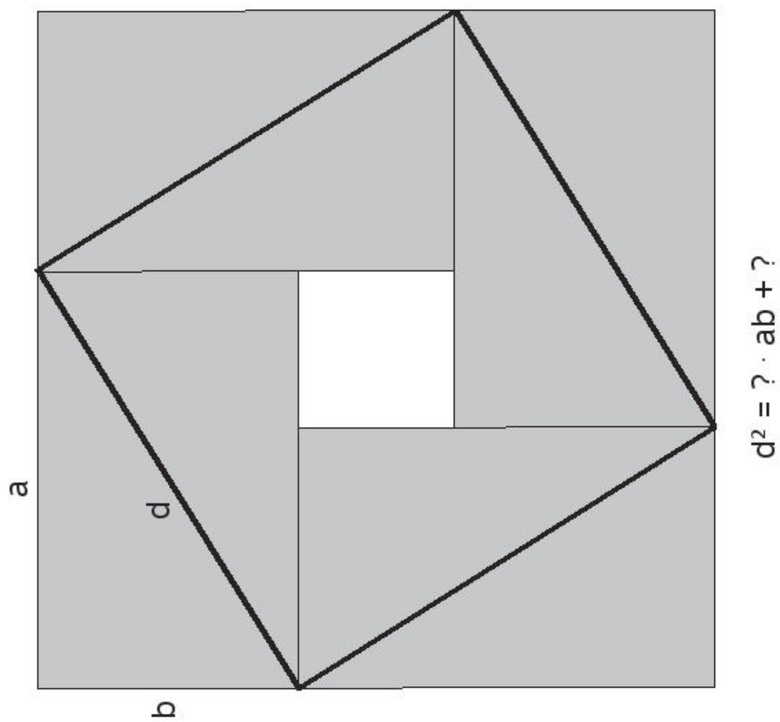
LM 1.1



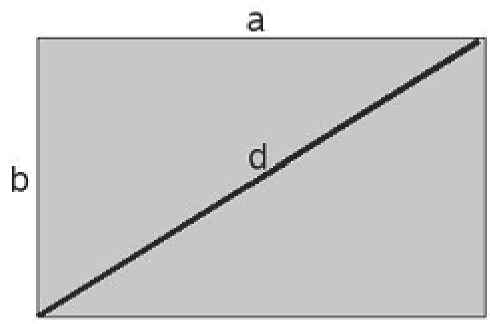


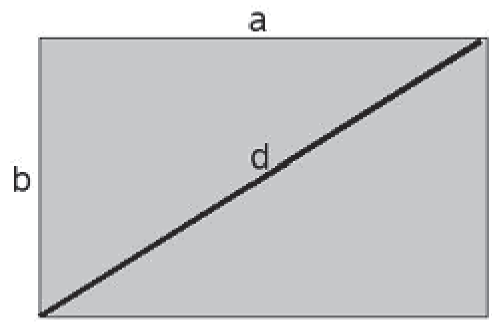
LM 1.2

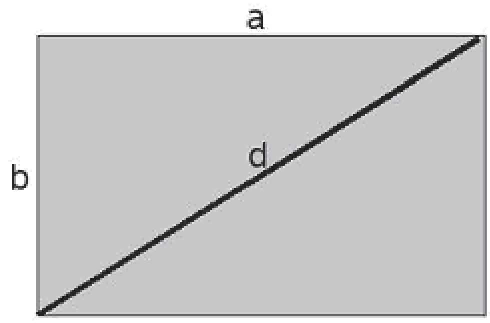


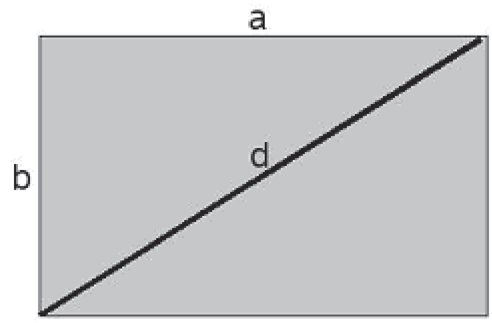


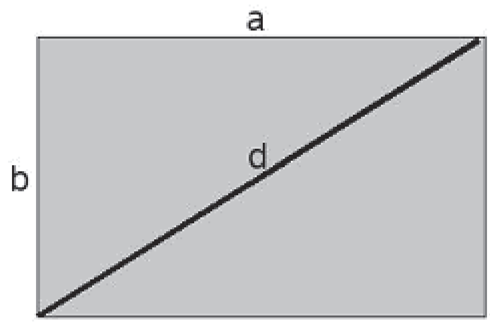
LM 1.3 (Je ein Exemplar in A5 jeder Arbeitsgruppe aushändigen.)

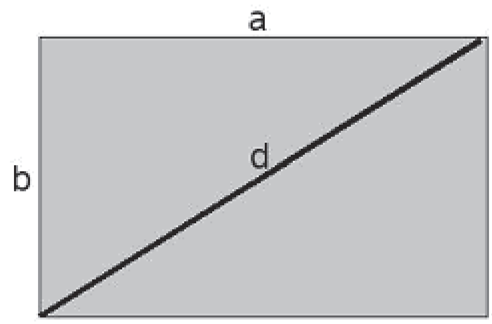


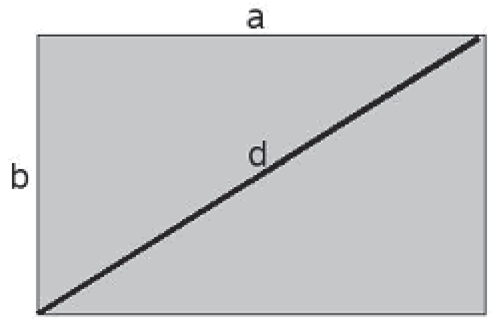


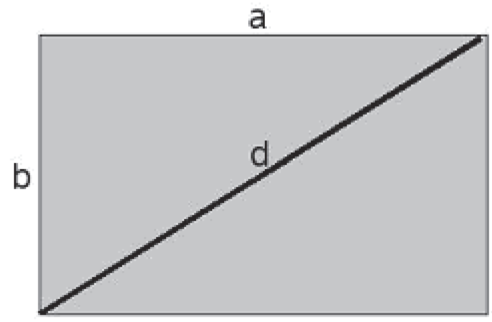












LM 2.1

Lösungen für die Übungsaufgaben der Wochenplanarbeit

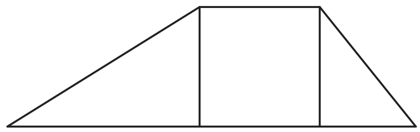
Lösungen zur Aufgabensammlung "Längen"

Aufgabe 1

a)

	I)	II)	III)	IV)
Kathete a	5 cm	1,5 cm	7 cm	5 cm
Kathete b	12 cm	3,6 cm	24 cm	12 cm
Hypotenuse c	13 cm	3,9 cm	25 cm	13 cm
Flächeninhalt A	30 cm²	2,7 cm²	84 cm²	30 cm²

b) Die Höhen unterteilen die Sohle in drei Stücke, deren Längen sich mit dem Pythagoras ausrechnen lassen.
7, 95 m + 2,60 m + 2,65 m = 13,20 m



Aufgabe 2

Zeichne den Abstand a von M senkrecht auf die Sehne ein.

a) $a = \sqrt{r^2 - (\frac{s}{2})^2}$ b) $s = 2 \cdot \sqrt{r^2 - a^2}$ c) $r = \sqrt{a^2 - (\frac{s}{2})^2}$

Aufgabe 3

a) $A - S_1 - B$: $\sqrt{34} + \sqrt{100} = 15{,}83$ (km) ; $A - S_2 - B$: $\sqrt{74} + \sqrt{52} = 15{,}81$ (km) (Etwas kürzer!)

b) Die Gesamtlänge für irgendeinen Punkt S mit dem Abstand s vom Ursprung ist die Länge:

$$L(s) = \sqrt{5^2 + s^2} + \sqrt{(11 - s)^2 + 6^2}$$

Zeichnet man das als Funktion oder schaut sich die Wertetabelle an, sieht man, dass die minimale Länge bei s = 5 km, also einer Gesamtlänge von 15,556 km, liegt. Zeichnerisch ist das klar: Die kürzeste Verbindung ist die Gerade!

Lösungen zur Aufgabensammlung "Sport"

Aufgabe 1

a) Weg von Mathine: 150 m (100%); Weg von Mathus: 111,80 m (74,5%).
Mathus spart 25,5 % von Mathines Weg.

b) Summe der Wege: 261,80 m; Hälfte davon: 130,90 m.
Mathus muss also Mathine noch etwa 19,10 m entgegenlaufen.

Aufgabe 2

a) Ideallinie: 3800 m
Ist der Abstand vom Idealpunkt a, beträgt die Länge
$l = (\sqrt{a^2 + 1800^2} + 200 + 1800)$ m.
Der Unterschied ist sehr gering. Vermutlich ist es wichtiger, ob der Schwimmer bei der Aufstellung in der ersten Reihe steht.

a in m	l in m
15	3800,06
30	3800,25
45	3800,56
60	3801,00
70	3801,36

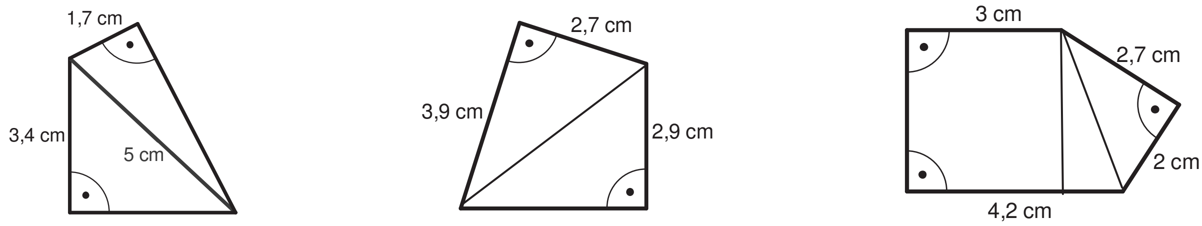
b) Schwimmstrecke:
$1500 + \sqrt{70^2 + 300^2} + 200 + 1800$ m = 3808,06 m.
Er legt ca. 8 m mehr zurück.

Lösungen zur Aufgabensammlung "Flächen"

Aufgabe 1:

a) Prinzip: Unterteilung der Figur in rechtwinklige Teildreiecke. Bei denen errechnet sich der Flächeninhalt aus $\frac{1}{2}$ · (Länge der Kathete 1) · (Länge der Kathete 2).
Die fehlenden Längen werden über den Satz von Pythagoras berechnet.

a)



Figur I:

$A = \frac{1}{2} \cdot 3{,}4 \cdot 3{,}7 + \frac{1}{2} \cdot 1{,}7 \cdot 4{,}7 = 10{,}3\ \text{cm}^2$

U = 13,5 cm

Figur II:
Hypotenusenlänge: 4,74 cm;

$A = \frac{1}{2} \cdot 3{,}9 \cdot 2{,}7 + \frac{1}{2} \cdot 2{,}9 \cdot 3{,}8 = 10{,}78\ \text{cm}^2$

U = 13,3 cm

Figur III:
Mittleres Dreieck:
Hypotenusenlänge: 3,36 cm;
Länge der unteren Kathete: 4,2 – 3 = 1,2 cm;
Länge der linken Kathete: 3,14 cm
Flächeninhalte von links:

$A = 4{,}2 \cdot 3{,}14 + \frac{1}{2} \cdot 1{,}2 \cdot 3{,}14 + \frac{1}{2} \cdot 2{,}0 \cdot 2{,}7$
$= 17{,}77\ \text{cm}^2$

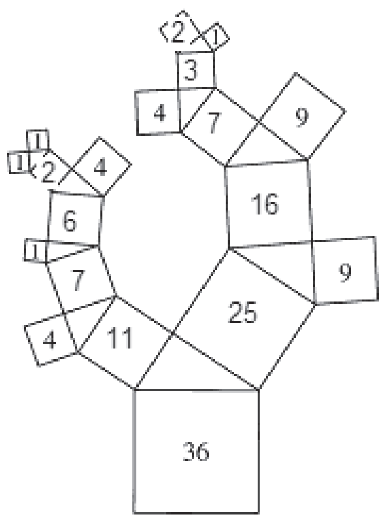
U = 16,24 cm

b) $h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{3}$ $\qquad a = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot h$ $\qquad A = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$

c) $A = a^2 \cdot \sqrt{3}$

Aufgabe 2

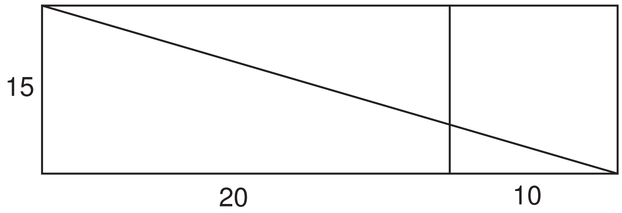
a)



b) a) x = 1 b) x = 2 c) x = 6 d) x = 5

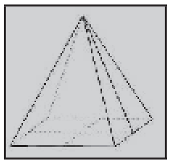
Lösungen zur Aufgabensammlung "Körper"

Aufgabe 1



a) Lösungsidee: Die rechte Seitenwand wird nach vorn geklappt, so dass die Spinne über eine gerade Fläche krabbelt, ohne dass sich die Entfernungen geändert haben. Dann ist natürlich die kürzeste Verbindung die Gerade.
Nach Pythagoras ist die Länge des kürzesten Wegs 33,54 cm.

Aufgabe 2



a) Länge der Seitenhöhe: $h = \sqrt{21{,}6^2 + (\frac{35{,}4}{2})^2} = 27{,}93$ m
Inhalt der Gesamtfläche: $A = 4 \cdot \frac{27{,}926 \cdot 35{,}4}{2} = 1977{,}16\ m^2$

b) $H = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2}$ $H = 7{,}07$ cm

Aufgabe 3:

Höhe der Säule = $\sqrt{33^2 + 52^2} = 61{,}59$ m (rund 62 m)

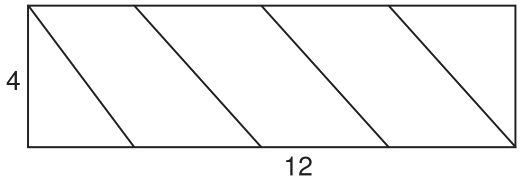
Aufgabe 4

Die Diagonale der Schrank-Seitenwand darf nicht höher als die Wand sein.
Im rechtwinkligen Dreieck Schrankdiagonale – Schrankhöhe – Schrankbreite muss also gelten:

Maximale Schrankhöhe: $s_{max} = \sqrt{2{,}40^2 - 0{,}60^2} = 2{,}32$ m

Aufgabe 5:

Stelle dir den Stab als Rohr vor. Schneide das Rohr der Länge nach auf und lege es glatt ausgebreitet hin. Dann sieht das Gebilde wie rechts aus:

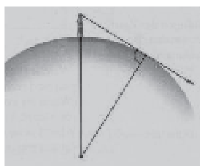


Die gesamte Fadenlänge berechnet sich aus den vier kongruenten rechtwinkligen Dreiecken:

Länge: $l = 4 \cdot \sqrt{4^2 + 3^2} = 20$ cm

Lösungen zur Aufgabensammlung "Weitblick"

Aufgabe 1



In dem rechtwinkligen Dreieck ist die gesuchte Sichtweite der Tangentenabschnitt Turmspitze – Erdoberfläche. Die andere Kathete hat die Länge des Erdradius, die Hypotenuse Erdradius + Turmhöhe.

$w = \sqrt{6370{,}045^2 - 6370^2} = 23{,}94$ km

Aufgabe 2

a)

Höhe in km	0,00160 (1,60 m)	0,020	0,368	10	35790
Sichtweite in km	4,51	15,96	68,47	357,07	41675

b) Herleitung über: $\text{sicht}(h) = \sqrt{(6370 + h)^2 - 6370^2} = \sqrt{h^2 + 12740 \cdot h}$

c) Mathus nimmt eine Proportionalität an, diese kann mit den errechneten Tabellenwerten widerlegt werden.

d) Bei geringen Höhenangaben ist wegen der Einheit km der Teilterm h^2 so klein, dass dieser Wert kaum in die Rechnung eingeht.

Lösungen zur Aufgabensammlung "Rechner & Koordinaten"

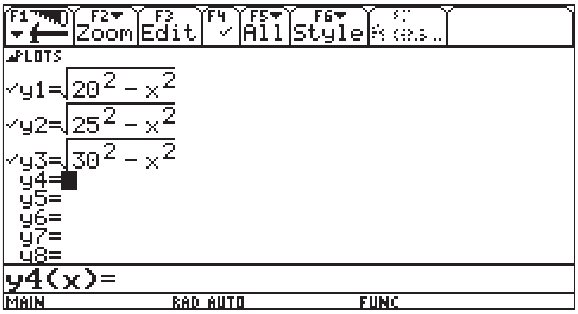
Aufgabe 1:

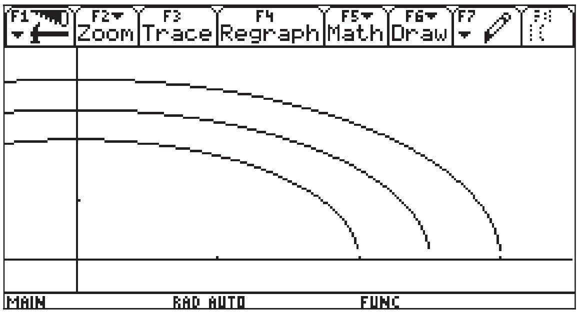
a) Die Formel berechnet die Länge der zweiten Kathete aus den Werten der ersten Kathete und der Hypotenuse: kurz(K,H) = $\sqrt{H^2 - K^2}$

Makro für **lang**: lang(K1,K2) = $\sqrt{K1^2 + K2^2}$

b) Bei **lang** ist das Vertauschen egal. Bei **kurz** liefert es eine Fehlermeldung, weil die Zahl unter der Wurzel negativ ist. Die andere Kathete berechnet sich nach der gleichen Formel, deshalb braucht man keine weitere.

c) **Kurz(x, 25)** berechnet die zweite Kathetenlänge in Abhängigkeit von x. Es muss x < 5 gelten.
„Jeder Kathete x in einem rechtwinkligen Dreieck mit H = 25 wird die Länge der anderen Kathete zugeordnet.“
Die Graphen schneiden die Koordinatenachsen jeweils beim Wert der Hypotenusenlänge (H = 20, 25, 30)





Aufgabe 2:

a) $\sqrt{74}$ $\sqrt{40}$ $\sqrt{116}$ 10

b) $\sqrt{50}$ $\sqrt{52}$ 16

c) Koordinaten von 6 Punkte auf dem Kreis mit dem Radius 10:
→ Tabelle des Rechners aufrufen!

Aufgabe 3:

a) Die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = 25$ wurde nach y aufgelöst.
Der obere Kreisteil entspricht der positiven Wurzel.

b) y2 = $-\sqrt{25 - x^2}$

c) Die [WINDOW]-Einstellung wurde anders gewählt. Die Achseneinteilungen haben einen unterschiedlichen Maßstab. Er hätte zum Beispiel ZOOM SQUARE wählen müssen.

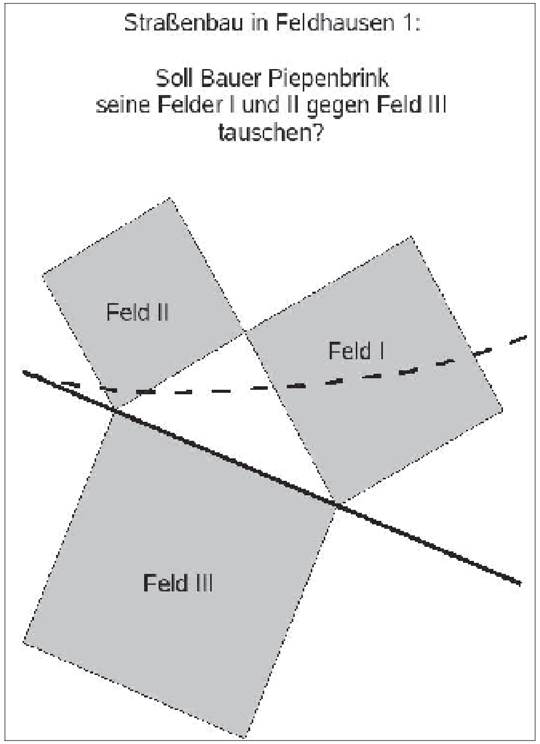
Aufgabe 4:

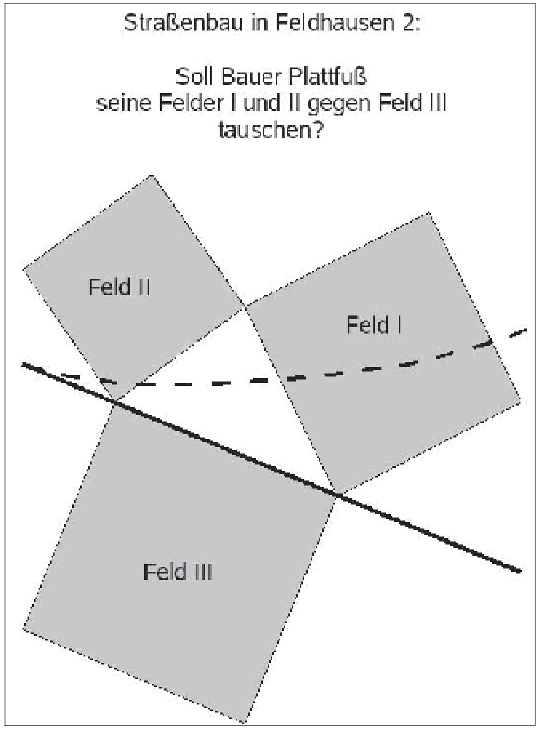
Kreisgleichung: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$

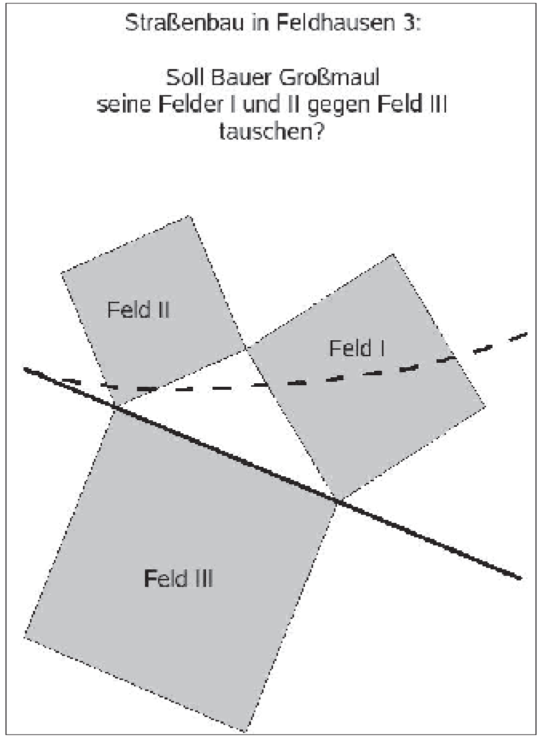
Aufgelöst nach y: $y = \pm\sqrt{16 - (x-2)^2} + 3$

LM 3.1

Straßenbau in Feldhausen

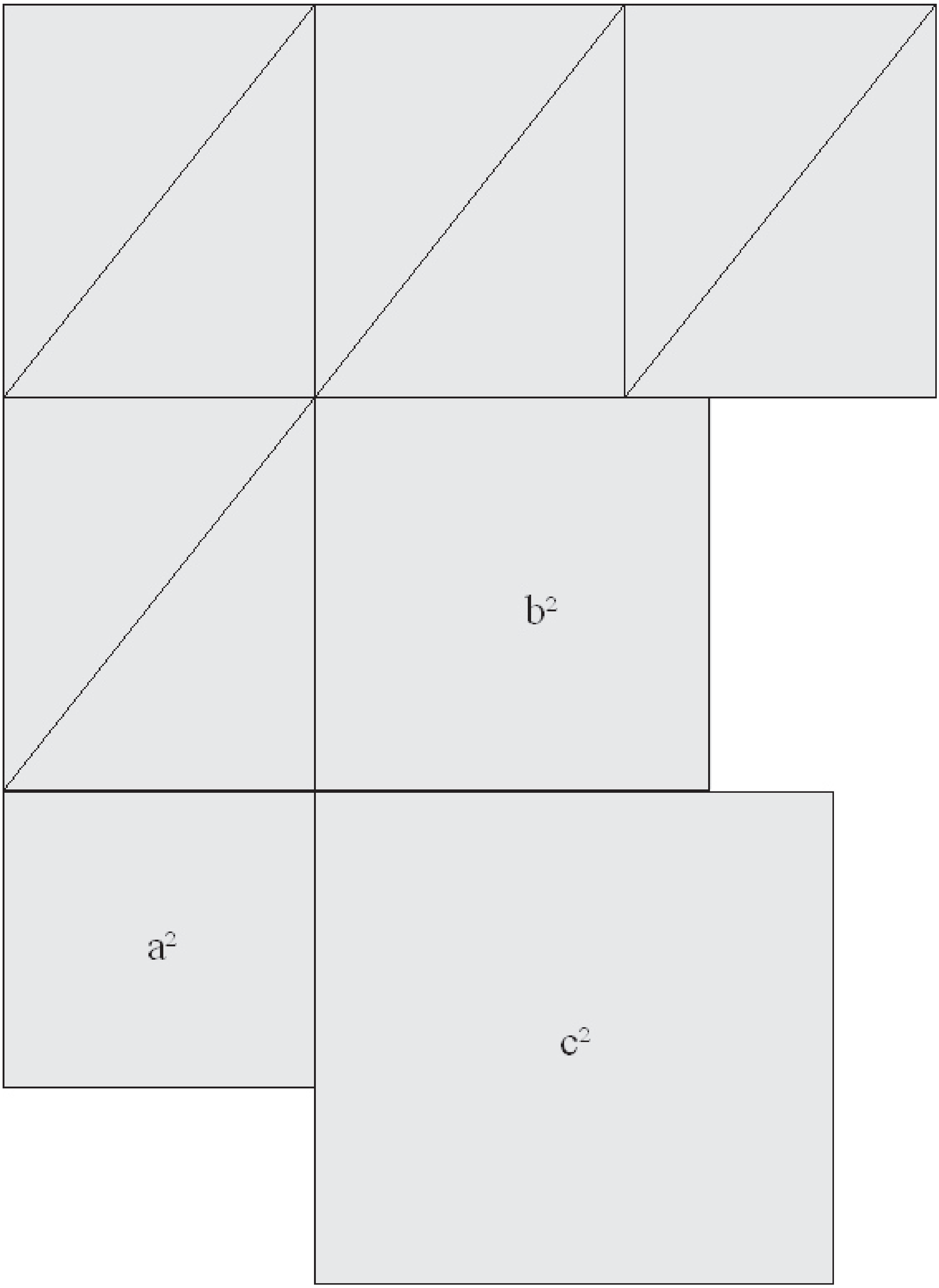






LM 3.2

Auf starkes Papier kopieren, in alle 8 Dreiecke und 3 Quadrate zerschneiden und als Material der Aufgabe G1 von SM 1.3.1 in der arbeitsteiligen Gruppenarbeit beigeben.

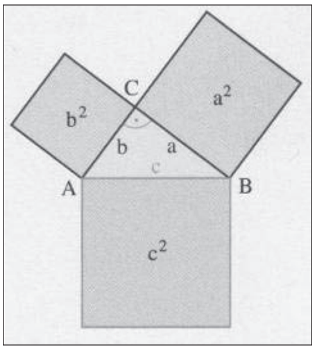


4. Wissensspeicher

Satz von Pythagoras

Wenn das Dreieck ABC rechtwinklig ist, dann ist der Flächeninhalt des Hypothenusenquadrates gleich der Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den beiden Katheten.

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ für } \gamma = 90°$$

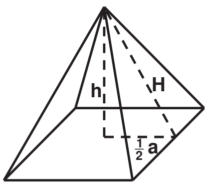
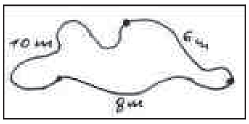
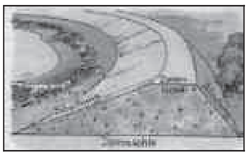


Kehrsatz des Satzes von Pythagoras

Für jedes Dreieck ABC gilt: Wenn $c^2 = a^2 + b^2$, dann $\gamma = 90°$.

5. Selbsteinschätzung

Schätze deine Kenntnisse ein und mache ein Kreuz in der entsprechenden Spalte.

Ich kann	**ich bin sicher**	**ich muss noch üben**	**ich brauche Hilfe**
• Diagonalen in Rechtecken und Quadraten berechnen  $d = \sqrt{5^2 + 5^2}$			
• Abstände von Punkten zum Ursprung im Koordinatensystem berechnen P (5 | 3); d = $\sqrt{5^2 + 3^2}$			
• Abstände zwischen Punkten im Koordinatensystem berechnen P (5 | 3); Q (10 | 6); d = $\sqrt{5^2 + 3^2}$			
• den Satz von Pythagoras ohne Verwendung einer Formel wiedergeben			
• den Satz von Pythagoras zur Berechnung in Flächen und Körpern verwenden 			
• pythagoräische Zahlentripel bilden und erkennen (3 | 4 | 5) ; 32 + 42 = 52			
• mithilfe pythagoräischer Zahlentripel rechte Winkel überprüfen und konstruieren[1] 			
• den Satz von Pythagoras in Anwendungssituationen zur Berechnung verwenden[2] 			

[1] Neue Wege 8; S. 198; 978-3-507-85504-5
[2] EdM 9, S.143, 3-507-87123-8

6. Rechnerfreie Aufgaben

Aufgabe1

a) Die Seiten eines Rechtecks sind 6 cm und 8 cm lang. Gib die Seitenlänge eines flächengleichen Quadrats an.

b) Entscheide begründet: Gibt es ein rechtwinklig-gleichseitiges Dreieck?

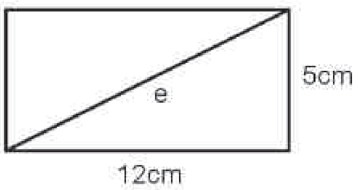
c) Ergänze zu einem pythagoräischen Tripel:
12 $\square$ 13 10 24 $\square$

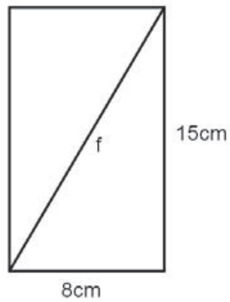
d) Gib eine Formel zur Berechnung der Höhe eines gleichseitigen Dreiecks an.

Aufgabe 2

a) Die Seite eines Rechtecks misst 4,5 cm, sein Umfang beträgt 20 cm.
Wie lang ist die zweite Seite?

b) Berechne jeweils die Diagonale.





c) Skizziere ein rechtwinkliges Dreieck, so dass gilt:
$r^2 + s^2 = t^2$

d) Entscheide begründet, ob sich mit den angegebenen Seitenlängen ein rechtwinkliges Dreieck ergibt:
a = 8 m b = 10 m c = 6 m.
k = 5 cm l = 7 cm m = 5 cm.

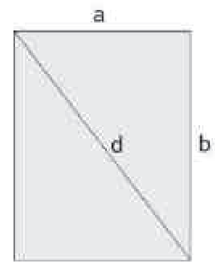
Aufgabe 3

a) Die Länge einer Quadratseite beträgt a cm. Wie berechnet man die Länge der Diagonale?

b) Ein rechtwinkliges Dreieck hat die Kathete r = 24 m und Hypotenuse t = 25 m. Berechne die andere Kathete s und den Flächeninhalt des Dreiecks.

7. Klassenarbeitsaufgaben

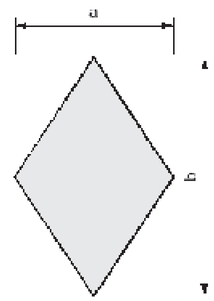
Aufgabe 1



In einem Rechteck seien die Seitenlängen mit a und b bezeichnet sowie die Diagonale mit d.

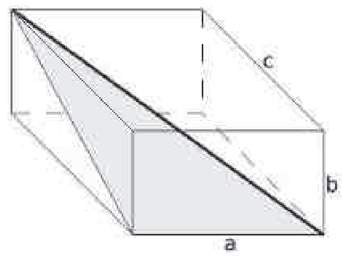
a) a = 3 dm, b = 5 dm. Berechne d.
b) a = 6 m, d = 8 m. Berechne b.

Aufgabe 2



Eine Raute habe die Diagonalenlängen a = 7 cm und b = 12 cm.
Berechne den Umfang und den Flächeninhalt der Raute.

Aufgabe 3



a) Der abgebildete Quader habe die Seitenlängen
   a = 3 cm, b = 2 cm und c = 5 cm.
   Berechne den Flächeninhalt des grau gefärbten Dreiecks.
b) Die dick markierte Dreiecksseite ist eine Diagonale des Ausgangsquaders.
   Entwickle eine Formel zur Berechnung der Diagonalenlänge für einen Quader mit den Seitenlängen a, b und c.

Aufgabe 4

Ein gleichseitiges Dreieck habe die Seitenlänge 5 cm.

a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks
b) Entwickle eine Formel für den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a.

Aufgabe 5

Ein Balken lehnt an einer Wand. Der Balken ist 30 m lang und steht unten 6 m ab.
Der Balken wird unten so verschoben, dass er senkrecht an der Wand steht.
Wie weit ist der höchste Punkt des Balkens dabei nach oben gewandert?

Aufgabe 6

Ein 112 m hoher Sendemast soll durch vier Stahlseile abgesichert werden, die in ¾ der Höhe am Mast befestigt werden. 55 m vom Mast entfernt sollen die Seile am Boden verankert werden.
Berechne, wie viel Seil benötigt wird. Vernachlässige dabei, dass die Seile durchhängen können.

Aufgabe 7

Wilhelm ist Bauarbeiter. Er soll auf einem Grundstück den Grundriss eines Geräteschuppens abstecken und muss hierzu rechte Winkel konstruieren. Zur Verfügung hat er nur ein 12 m langes Seil und seinen Zollstock.
Beschreibe ein Verfahren, wie Wilhelm vorgehen sollte.

Aufgabe 8

a) Ergänze zu pythagoräischen Zahlentripeln:

(6 | 8 |); (12 | | 13); (| 4a | 5a)

b) Simon hat beobachtet, dass man ebenfalls ein pythagoräisches Tripel erhält, wenn man die drei Zahlen eines pythagoräischen Tripels verdoppelt. Er behauptet: „Das stimmt nicht nur, wenn man verdoppelt, sondern wenn man alle drei Zahlen mit einem gleichen Faktor multipliziert.“
Er hat Recht. Gib einen plausiblen Grund an, warum.

Aufgabe 9

Figur 1 und Figur 2 sind gleich groß. Begründe hieran den Satz von Pythagoras.

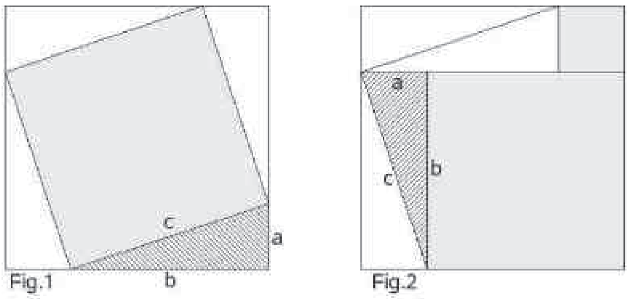
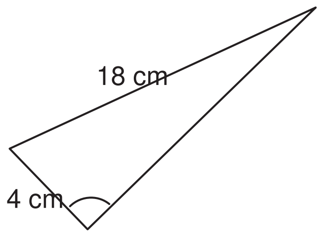


Fig.1 Fig.2

Aufgabe 10

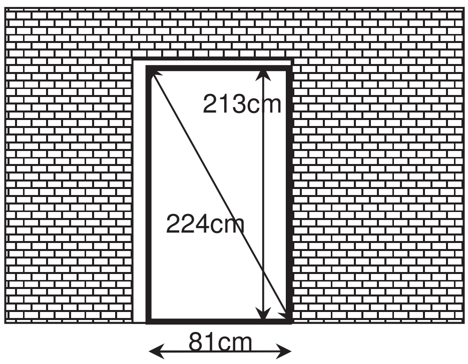
a) Formuliere den Satz von Pythagoras, ohne die Angabe einer Formel.
b) Bestimme die fehlende Seitenlänge des Dreiecks.



Aufgabe 11

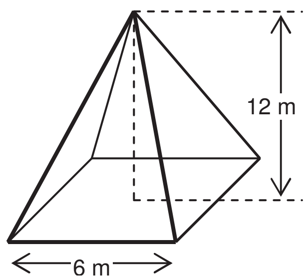
Herr Jakobsen setzt eine Türzarge (Türrahmen) in ein dafür vorgesehenes Loch in der Wand ein. Damit die Tür passt, muss der Rahmen exakt rechtwinklig sitzen. Zu dem Zweck misst er die Diagonalenlänge.

Prüfe durch Rechnung, ob die Zarge bereits richtig sitzt. Wenn ja, begründe deine Aussage; wenn nein, gib an, wie und wie stark er den Sitz des Rahmens korrigieren muss.



Aufgabe 12

Der quadratische Glockenturm des Doms zum heiligen Sankt Martin benötigt ein neues Kupferdach (siehe Skizze). Ermittle die benötigte Menge an Kupferblech.



Das sollst Du im Kopf können

Aufgabe 1

a) Berechne $45 \cdot 8$.

b) Nenne die Quadratzahl von 13.

c) Nenne drei Alltagsgegenstände, die ein Prisma als Körperform haben!

d) Schneiden sich die Winkelhalbierenden eines Dreiecks im Mittelpunkt des Umkreises?

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit aus einem Skatblatt (32 Karten) eine Dame zu ziehen?

f) Gilt der Satz von Pythagoras für ein Dreieck mit den Seitenlängen 6, 8 und 10?

g) Zwei Figuren heißen kongruent zueinander, wenn … .

h) Benni kauft 4 Konzertkarten für 320 €. Später gibt er eine wieder zurück. Wie viel hat er letztendlich bezahlt?

i) Klammere aus: $25\,w + 35\,w^2$

j) Gib die Maße eines Rechtecks mit dem Flächeninhalt 36 cm^2 an.

Aufgabe 2

a) Die Seiten eines Rechtecks sind 6 cm und 8 cm lang. Gib die Seitenlänge eines flächengleichen Quadrats an.

b) In einer Klasse sind 24 Kinder. Das Verhältnis Jungen zu Mädchen ist 3 : 5. Wie viele Jungen sind in der Klasse?

c) Die Wahrscheinlichkeit, aus 1.000 Losen einen Gewinn zu ziehen, beträgt 4 %. Wie viele Gewinnlose sind es?

d) Entscheide begründet: Gibt es ein rechtwinklig-gleichseitiges Dreieck?

e) Ergänze zu einem pythagoreischen Tripel:

$12 \quad \square \quad 13$ $\qquad\qquad$ $10 \quad 24 \quad \square$

f) Berechne:

$\frac{1}{4} + 1\frac{3}{8}$ $\qquad\qquad$ $\frac{22}{51} \cdot \frac{17}{66}$ $\qquad\qquad$ $(-\,4{,}5) + 2{,}5 \cdot 2$

g) 3 % sind 1,50 €. Gib den Grundwert G an.
Gib an, wie viel 7 % von 7 € sind.
Gib in % an: 45 kg von 30 kg.

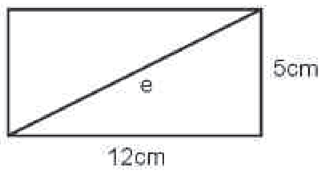
h) Gib eine Formel zur Berechnung der Höhe eines gleichseitigen Dreiecks an.

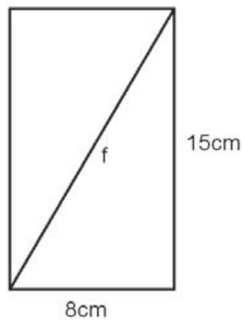
Aufgabe 3

a) 3 % Rabatt sind 7,50 €. Wie teuer ist die Ware?

b) Die Seite eines Rechtecks misst 4,5 cm, sein Umfang beträgt 20 cm. Wie lang ist die zweite Seite?

c) Berechne jeweils die Diagonale.





d) Berechne:

$2{,}5 : 0{,}05$ $\qquad$ $0{,}2 \cdot 0{,}4$ $\qquad$ $(-1) + 1 \cdot (-1) : 1$

e) Skizziere ein rechtwinkliges Dreieck, so dass gilt: $r^2 + s^2 = t^2$

f) Um welche Zuordnung handelt es sich bei $y = 0{,}4 \cdot x - 7$?

g) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine 1 oder eine 6 zu würfeln?

h) Entscheide begründet, ob sich mit den angegebenen Seitenlängen ein rechtwinkliges Dreieck ergibt:

i) a = 8 m $\qquad$ b = 10 m $\qquad$ c = 6 cm $\qquad$ k = 5 cm $\qquad$ l = 7 cm $\qquad$ m = 5 cm

Aufgabe 4

a) Die Länge einer Quadratseite beträgt a cm. Wie berechnet man die Länge der Diagonale?

b) Klammere aus:

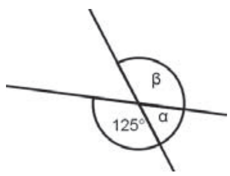
$15\,x + 35\,x^2$ $\qquad$ $28a - 42a^2 - 7a^3$

c) Wandle um:

0,1 t (kg) $\qquad$ 0,8 m^2 (dm^2) $\qquad$ 320 mm^3 (cm^3)

d) Ein rechtwinkliges Dreieck hat die Kathete r = 24 m und Hypotenuse t = 25 m. Berechne die andere Kathete s und den Flächeninhalt des Dreiecks.

e) Wie groß sind die Winkel α und β?



f) Vereinfache:

$\sqrt{98} : \sqrt{2}$ $\qquad$ $\sqrt{100x^2 + 21x^2}$ $\qquad$ $\sqrt{3}\left(2\sqrt{75} - 4\sqrt{12}\right)$

g) Berechne für ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit den Schenkeln $a = b$ und der Höhe h_c den Flächeninhalt: $\quad$ a = 17 cm , h_c = 15 cm.

h) Welche Fehler wurden gemacht?

$9\,a + 9\,b = 9\,a\,b$ $\qquad$ $3\,x^2 + 4\,x = 7\,x^2$ $\qquad$ $2\,a + 3\,a^2 = 5\,a^3$

Aufgabe 5

a) Berechne:

$\frac{4}{5}$ von 85 € $\frac{5}{7}$ von 63 kg $\frac{2}{3}$ von 90 t

b) Fasse soweit wie mögliche zusammen:

$7\sqrt{ax}+3\sqrt{bx}+2\sqrt{ax}$ $9\sqrt{7}-6+3\sqrt{7}+3-\sqrt{7}$

c) Das Schwimmbecken des Freibades soll mithilfe gleich starker Pumpen gefüllt werden. 2 Pumpen benötigen 72 Stunden. Wie viele Stunden brauchen 8 dieser Pumpen?

d) Wende das Distributivgesetz an:

$x\,(a+b)$ $(x-y)\cdot(-5)$ $15\,k\,(12\,q-1)$

$8\,a^2+4\,a$ $10\,p\,q+15\,p^2\,q-2\,p\,q^2$ $9\,u^4+10\,u^3$

e) Setze das richtige Zeichen ein (< , > , =):

$\frac{4}{9}\square 0{,}5$ $\frac{2}{3}\square 0{,}6$ $\frac{3}{4}\square 0{,}75$ $\frac{5}{6}\square 0{,}84$

f) Eine Münze wird zweimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau einmal Wappen zu werfen?

g) Gib an, wie man den Mittelpunkt des Inkreises bei einem Dreieck erhält.

h) Berechne:

$(-17)-(+31)-(-23)$ $-21\cdot 15$ $-17:\left(-2\frac{5}{6}\right)$

Aufgabe 6

a) Stelle jeweils einen Term auf:

Addiere x zur Summe der Zahlen 25 und y.

Multipliziere die Summe der Zahlen a und b mit deren Differenz.

b) Gib den Term jeweils in Wortform an: $x+2\cdot 8$ $(x+2)\cdot 8$

c) Berechne. Kürze, wenn möglich:

$\frac{5}{9}\cdot 9$ $\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{8}$ $5\frac{1}{3}:6$ $2\frac{2}{7}:1\frac{1}{3}$

d) Ordne der Größe nach: $\sqrt{12}$; $3{,}4$; $\sqrt{10}$; $\frac{7}{2}$; 4.

e) Vereinfache:

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$ $5\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$ $\sqrt{2}\cdot\left(2+\sqrt{8}\right)$

f) Berechne mithilfe der binomischen Formel:

81^2 98^2

g) Eddi Raser spart für ein neues Mountainbike und legt Woche für Woche 12 € zurück. Nach 30 Wochen hat er das Geld zusammen. Wie lange müsste er sparen, wenn er wöchentlich nur 9 € spart?

h) Fülle die Lücken aus:

$a^2+6ab+\square=\left(a+\square\right)^2$ $64k^2-\square+t^2=\left(\square+t\right)^2$ $1+r+\square=\left(1+\square\right)^2$

Aufgabe 7

a) Multipliziere: $(5a-6b)\cdot(5a-6b)$

b) Berechne: $1\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$

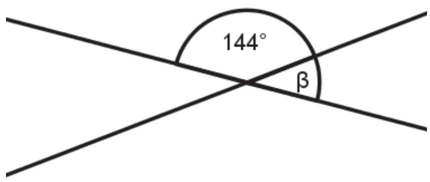
c) Berechne: $\sqrt{72}:\sqrt{2}$

d) Die Seiten eines Quadrates wurden verdoppelt. Wie verändert sich der Umfang?

e) Gib die beiden ganzen Zahlen an, zwischen denen $\sqrt{6}$ liegt.

f) Berechne 60 % von 60 kg.

g) Wie groß ist der Winkel β? h)



i) Eine Taxifahrt kostet 3 € Grundgebühr und 0,50 € pro gefahrenen Kilometer. Wie weit kann man mit 10 € fahren?

j) Die Seitenlänge eines Würfels wird verdoppelt. Wie ändert sich das neue Volumen?

k) Berechne: $\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{20}+\sqrt{5}\right)$

Aufgabe 8

a) Wie heißt die kleinste Zahl, die durch 2, 3 und 7 teilbar ist?

b) Die menschliche Lunge besteht aus etwa 100.000.000 Lungenbläschen, von denen jedes eine Oberfläche von 1 mm^2 aufweist. Wie groß ist die Oberfläche der Lunge in m^2?

c) Berechne: $\frac{4}{5}$ von 85 €

d) Berechne: $83-(-97)+(-25)$

e) Stelle einen Term auf: Vermindere das Dreifache einer Zahl um die Summe aus dieser Zahl und 10.

f) Multipliziere und fasse zusammen: $(3a+2b)\cdot(4b-2a)$

g) Wandle den Summenterm in einen Produktterm um: $16x^2+24xy+9y^2$

h) Ergänze: $\square+10x+25=\left(\square+\square\right)^2$

i) Peter wirft 30-mal einen Würfel und erhält 12-mal eine 5. Gib die relative Häufigkeit an.

Aufgabe 9

a) Berechne:

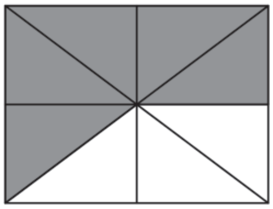
$-63+37$ $\qquad$ $(-3)\cdot 5\cdot(-12)$

40 % von 40 € $\qquad$ $-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$

b) Ordne von klein nach groß: 0,1 ; 0,03 ; 0,11

c) Was ist größer: $\frac{5}{8}$kg oder 630 g?

d) Wie groß ist der Anteil der gekennzeichneten Fläche in %?



e) Verwandle in km: 5.700 dm

f) Ergänze: $\left(\square - 3y\right)^2 = \diamond - 9xy + \bigcirc$

g) Berechne:

$(3x-2)\cdot(-2)$ $\qquad$ $\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}\right)^2$

$\frac{3}{8}:\frac{27}{32}$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x\right)^2$

Aufgabe 10

a) Rechne in die kleinere Einheit um:

9 min 17 s $\qquad$ 7 kg 43 g $\qquad$ 23 t 9 kg

b) Berechne:

$\frac{29}{30}-\frac{2}{5}-\frac{1}{3}$ $\qquad$ $4\frac{1}{3}-\left(-4\frac{5}{6}\right)$ $\qquad$ $21:\left(-\frac{7}{9}\right)$

c) Multipliziere:

$\left(\frac{1}{2}x+1\right)\cdot\left(\frac{2}{3}y-\frac{3}{4}\right)$ $\qquad$ $(3a+4b)\cdot(2s-3z)$

d) Wende das Distributivgesetz an:

$3\,x\,(2\,x-1)$ $\qquad$ $12\,a\,b-20\,a\,c$ $\qquad$ $(6-9\,x)\cdot 3$

e) Wie viel Cent sind $\frac{3}{5}$ von 1 €?

f) Runde auf Zehntel: 4,1199

g) Berechne:

$(-1)-1$ $\qquad$ $(-1)-(-1)$ $\qquad$ $(-1)+(-1)$

h) Welchen Winkel bilden Minuten- und Stundenzeiger um 14.00 Uhr?

Aufgabe 11

a) Faktorisiere mithilfe der binomischen Formeln:

$k^2 - 625$ $\qquad$ $x^2 + 14x + 49$ $\qquad$ $169 - 26a + a^2$

b) Entscheide begründet, ob man ein Dreieck aus den gegebenen Längen konstruieren kann:

a = 6 cm $\quad$ b = 7cm $\quad$ c = 10 cm

a = 9 cm $\quad$ b = 15 cm $\quad$ c = 5 cm

a = 12 cm $\quad$ b = 5 cm $\quad$ c = 7 cm

c) Wahr oder falsch? Begründe.

(i) Alle natürlichen Zahlen sind rationale Zahlen.

(ii) Die Wurzel aus einer Zahl ist immer kleiner als die Zahl selbst.

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Skatkartenspiel (32 Karten) ein As zu ziehen?

e) Gib an, bei welchen Dreiecken die Mittelpunkte von Um- und Inkreis zusammenfallen?

f) Multipliziere und vereinfache:

$5 \cdot (2a + 3b) + 3 \cdot (4a - b) - (-8a + 2b)$

$(-4a - 5b) \cdot (-2b + 3a)$

g) Ergänze:

$\square + 16x + \square = (x + 8)^2$

$\left(2a + \square\right)^2 = \square + \square + 100$

Das ist dein Basiswissen

Aufgabe 1

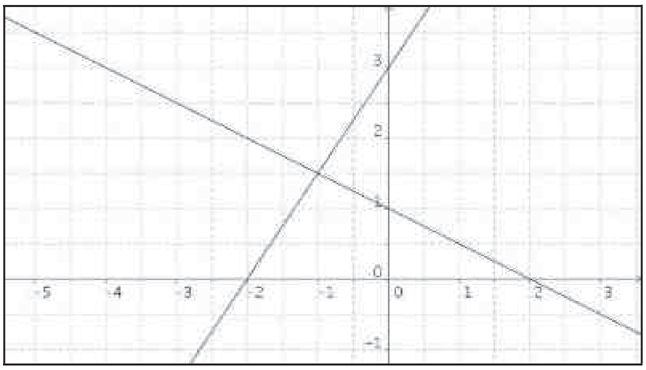
Tim hat zur Lösung der Gleichung $x + 1 = 2x - 3$ die folgende Tabelle erstellt:

x	x + 1	2 x – 3
2	3	1
3	4	3
4	5	5
5	6	7

a) Lies die Lösung der Gleichung ab.

b) Verändere diese Gleichung so, dass die Lösung $x = 3$ ist.

c) Zur Lösung einer anderen Gleichung hat er die rechts abgebildete Graphik erstellt. Wie lautet die Lösung jetzt?



Aufgabe 2

Es gilt: $3x + 2 = 1 + 2x$

Wer hat Recht? Prüfe durch Einsetzen und markiere:

	Tim:	Sina:	Elena:	Christoph:	Meike:
	$x = 2$	$x = 1$	$x = -1$	$x = -\frac{1}{5}$	$x = 3$
Richtig/Falsch:					

Aufgabe 3

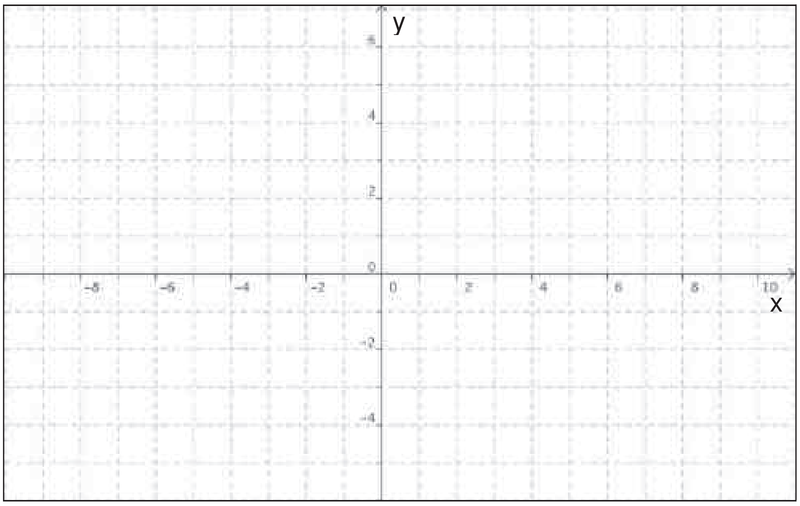
Löse nach x auf: $4x - 7 = 5$

Aufgabe 4

Skizziere die folgenden Graphen:

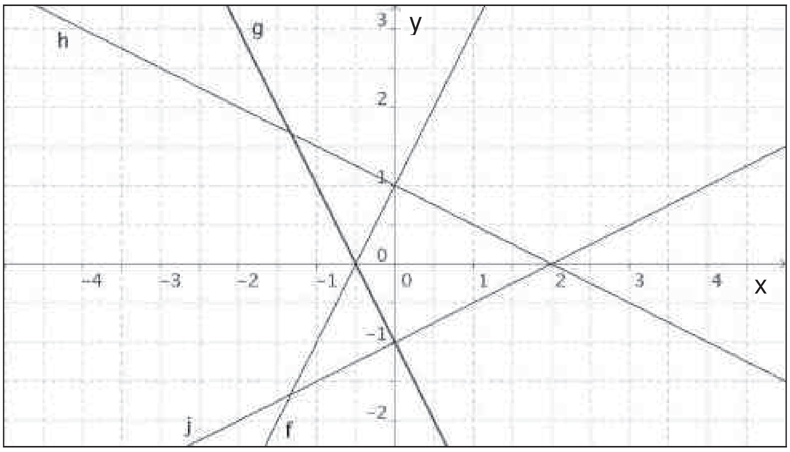
a) $y = 2x - 3$

b) $y = -\frac{1}{2}x + 2$



Aufgabe 5

Gib die zu den abgebildeten Graphen zugehörigen Funktionsgleichungen an.



f(x) =

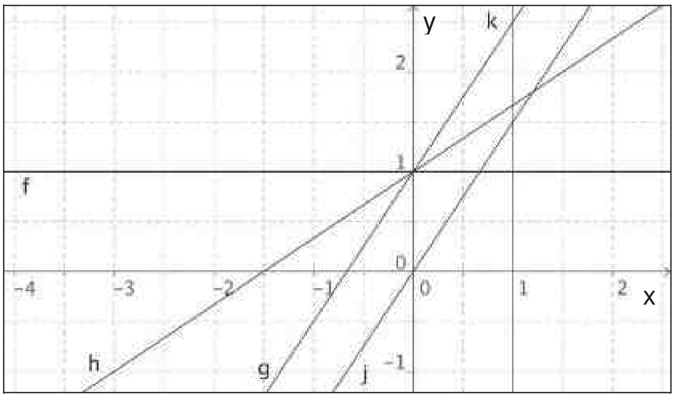
g(x) =

h(x) =

j(x) =

Aufgabe 6

Ordne den Graphen die Funktionsgleichungen zu. Nicht für jeden Graph ist eine Funktion angegeben, und nicht für jede Funktion ist ein Graph angegeben!



$y = \frac{3}{2}x + 1$ gehört zu:

$y = \frac{2}{3}x$ gehört zu:

$y = \frac{2}{3}x + 1$ gehört zu:

$y = 1$ gehört zu:

$y = \frac{3}{2}x$ gehört zu:

Aufgabe 7

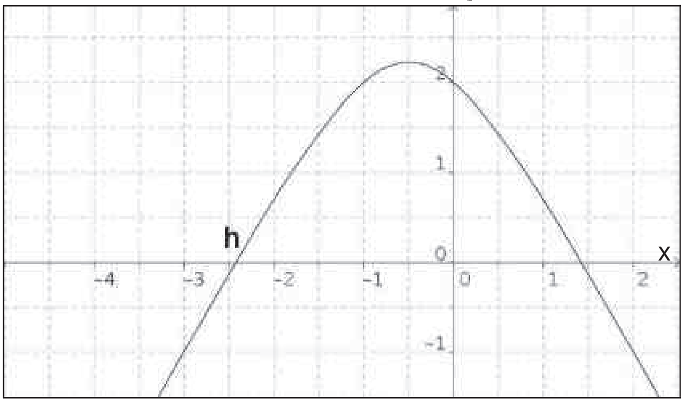
Es seien drei Funktionen f, g und h auf unterschiedliche Weise dargestellt:

(i) $f(x) = 3x - 4$

(ii)

x	- 2	- 1	0	1	2	3
g(x)	- 11	- 8	- 5	- 2	1	4

(iii)



a) Es sei jeweils x = 2. Welche Werte nehmen f(x), g(x) und h(x) jeweils an?

b) Für f, g und h sei jetzt jeweils der Funktionswert 2. Welchen Wert hat jeweils x?

Aufgabe 8

Löse die Gleichung. Notiere Zwischenschritte

a) $4x - 3 = 7$

b) $-\frac{1}{2}x + 1 = \frac{3}{2}x - 3$

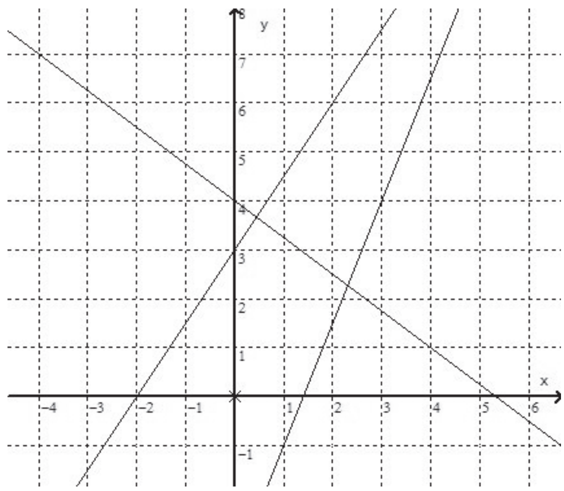
Aufgabe 9

Löse $4 + 2x = x^3$ graphisch oder tabellarisch.

Dokumentiere deinen Lösungsweg.

Aufgabe 10

Gib zu den nebenstehenden Geraden die zugehörigen Gleichungen an.



Aufgabe 11

Nach einem Fußballspiel verlassen die 20.000 Besucher das Stadion durch 4 Ausgänge. Gehe davon aus, dass dies gleichmäßig erfolgt. Durch jeden der Ausgänge gehen pro Minute 300 Zuschauer.
Betrachte die Funktion *Zeit nach dem Spiel (in min)* → *Anzahl der Zuschauer, die noch im Stadion sind.*

a) Vervollständige die Wertetabelle:

Zeit nach dem Spiel (in min)	0	1	2	5
Anzahl der Zuschauer, die noch im Stadion sind				

b) Erstelle eine Gleichung für diese Funktion.

c) Bestimme, wann das Stadion leer ist.

Aufgabe 12

Ein Abwassertank wird leer gepumpt. Durch die Gleichung y = - 6,5 x + 75 kann die noch im Tank vorhandene Abwassermenge berechnet werden, wobei x für die vergangene Zeit in Minuten und y für die Abwassermenge in Kubikmeter steht.

a) Erläutere die Bedeutung der Zahlenwerte 6,5 und 75.

b) Bestimme die zur vollständigen Entleerung nötige Zeit.

c) Bestimme die Zeit, die benötigt wird, um 40 Kubikmeter abzupumpen.

Aufgabe 13

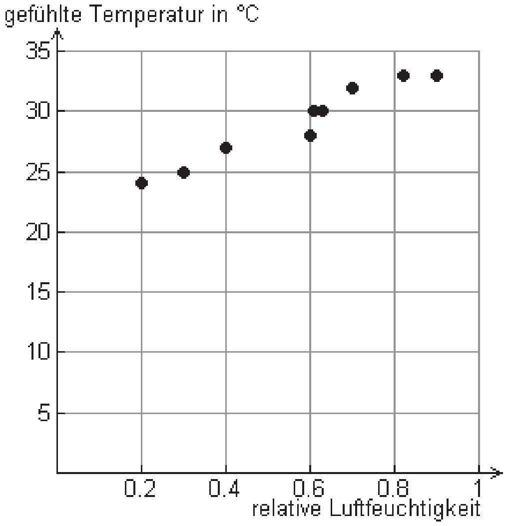
Relative Luftfeuchtigkeit	0.2	0.3	0.4	0.6	0.605	0.61	0.7	0.81	0.9
gefühlte Temperatur in °C	24.5	25	27	28	30	30	32	33	33

An schwülen Tagen kommt es den meisten Menschen wärmer vor, als es tatsächlich ist. Bei einer Umfrage war die tatsächliche Außentemperatur 27 °C und die relative Luftfeuchtigkeit variierte von 0,2 bis 0,95.

a) Formuliere eine Prognose:
Welche Temperatur würde bei einer Außentemperatur von 27 °C und einer relativen Luftfeuchtigkeit von 0,5 empfunden?

b) Bestimme die Gleichung einer Ausgleichsgeraden.

c) Was bedeutet der Schnittpunkt mit der y-Achse?



Aufgabe 14

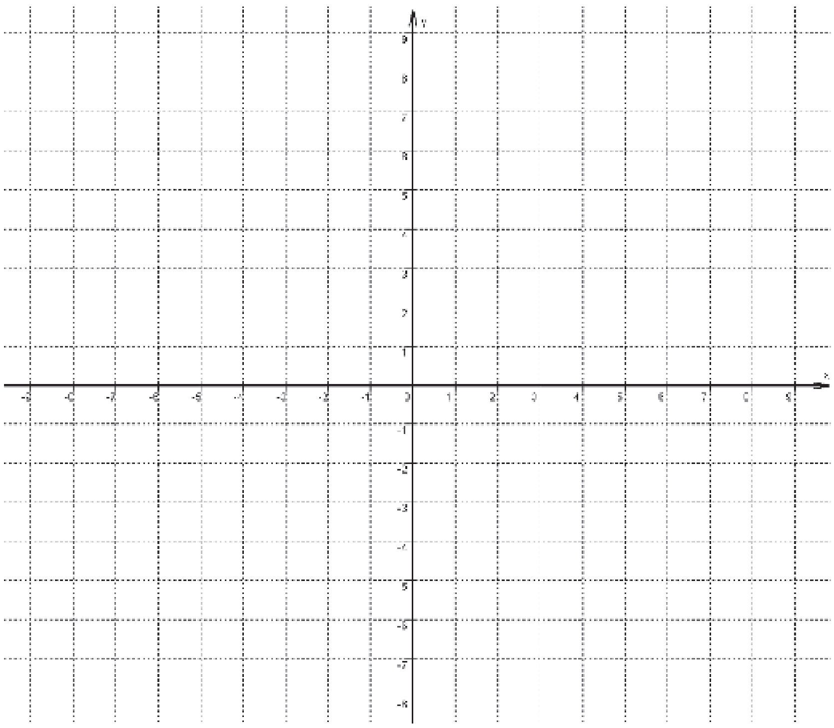
Die Geradenschar $f(x, m) = m \cdot x + 4 + m$ soll untersucht werden.

a) Zeichne drei Geraden der Schar in nebenstehendes Koordinatensystem.

b) Beschreibe die Schar und begründe deine Vermutung.

c) Was bedeutet $f(3, m)$? Verdeutliche dies in der Skizze.

d) Welche Gerade der Schar verläuft durch den Punkt P(2 | 16)?



Aufgabe 15

Timo hat das Makro nnn(a, b) in seinen V200 eingegeben:

a) Was berechnet das Makro?

b) Erläutere die Ausdrücke nnn(6, 9) und nnn(0, 2) sowie deren Ergebnisse.

```
■ solve(a·x + b = 0, x) → nnn(a, b)        Done
■ nnn(6, 9)                              x = -3/2
■ nnn(0, 2)                                 false
MAIN            RAD AUTO          FUNC 3/30
```

Aufgabe 16

a) Löse das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x - y &= 4 \\ \text{und } 2x + 4y &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x - \square\, y &= 4 \\ \text{und } 2x + 4y &= 0 \end{aligned}$$

Ergänze in der ersten Gleichung eine Zahl vor dem y so, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat.

c) Lässt sich in der ersten Gleichung eine Zahl vor dem y so ergänzen, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat? Begründe deine Aussage.

Aufgabe 17

Der Umfang eines Rechtecks beträgt 28,8 cm. Der Flächeninhalt wird um 17,35 cm^2 kleiner, wenn die eine Seite um 4,5 cm verlängert und die andere um 3,5 cm verkürzt wird.
Gib ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Seitenlängen an.

Aufgabe 18

Erstelle eine Wertetabelle für $x = -3, -2, \ldots, 3$, zeichne den Graphen und begründe, ob eine Funktion vorliegt:

a) $|y + x| = 1$

b) $y + |x| = 1$

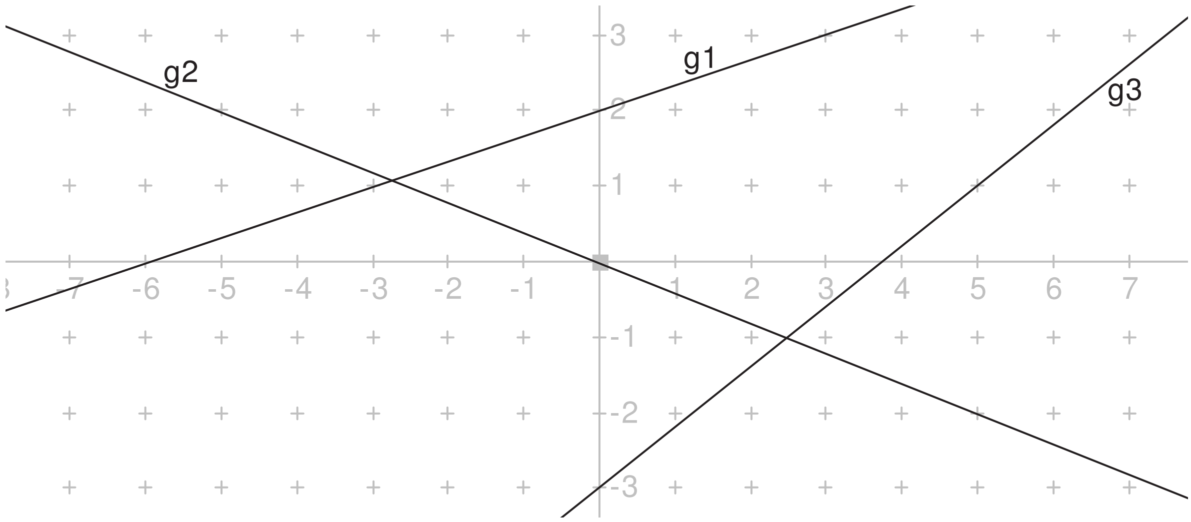
Aufgabe 19

Zeichne die Graphen folgender Funktionen verschiedenfarbig in ein gemeinsames Koordinatensystem:

a) $y = 2x - 3$ b) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ c) $y = -x$ d) $y = -0{,}6x - 0{,}5$ e) $y = \frac{x}{2} + 2$

Aufgabe 20

Lies die Gleichungen der unten gezeichneten Geraden ab.



Aufgabe 21

a) Zeichne eine Gerade mit der Steigung 0 und gib deren Gleichung an.

b) Zeichne eine Gerade, für die keine Steigung definiert ist und gib ihre Gleichung an.

Aufgabe 22

Die Gerade g soll die Gleichung $y = \frac{2}{47}x - \frac{5}{97}$ haben.

a) Gib die Gleichung für eine Gerade h an, die parallel zu dieser Geraden g ist.

b) Gib die Gleichung für eine Gerade k an, die g auf der y-Achse schneidet.

Aufgabe 23

a) Entscheide rechnerisch, ob der Punkt P(27 | 25) auf der Geraden mit der Gleichung $y = -\frac{1}{3}x + 36$ liegt.

b) Eine Gerade geht durch die Punkte P(3 | 4) und Q(10 | 2). Ermittle ihre Gleichung.

Aufgabe 24

Nach einem Fußballspiel verlassen die 60.000 Besucher das Stadion durch 5 Eingänge. Gehe davon aus, dass dies gleichmäßig erfolgt. Durch jeden der Eingänge gehen pro Minute 300 Zuschauer. Betrachte die Funktion *Zeit nach dem Spiel (in min)* → *Anzahl der Zuschauer, die noch im Stadion sind.*

a) Vervollständige die Wertetabelle:

Zeit nach dem Spiel (in min)	0	1	5
Anzahl der Zuschauer, die noch im Stadion sind			

b) Erstelle eine Gleichung für diese Funktion.

c) Bestimme, wann das Stadion leer ist.

Aufgabe 25

Die Geradenschar $f(x, m) = m \cdot x + 4 + m$ soll untersucht werden.

a) Zeichne einige Geraden der Schar.

b) Beschreibe die Schar und begründe deine Vermutungen.

c) Was bedeutet f(3, m)? Verdeutliche dies in der Skizze.

d) Welche Gerade der Schar verläuft durch den Punkt P(2 | 16)?

Aufgabe 26

Der Zusammenhang zwischen Temperaturangaben in Celsius und Fahrenheit ist linear. Wasser gefriert bei 32 °F und kocht bei 212 °F.

a) Skizziere die zugehörigen Punkte in einem °C,°F-Diagramm und berechne die Funktionsgleichung, die den Zusammenhang beschreibt.

b) Gib die Tabelle in 2 °C-Schritten von 4 °C bis 14 °C an.

c) Beschreibe die Änderungsrate.

Aufgabe 27

Die Entfernung zwischen München und Hannover beträgt ca. 480 km. Mit einem Flugzeug wird die Strecke Hannover – München bei Gegenwind in 2,5 Stunden zurückgelegt, der Rückflug München – Hannover bei Rückenwind in 2 Stunden.

a) Berechne die Geschwindigkeit des Flugzeuges bezüglich des Bodens bei Rücken- und bei Gegenwind.

b) Die Geschwindigkeit bezüglich des Bodens setzt sich zusammen aus der Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges und der Windgeschwindigkeit, es gilt:

$$\begin{array}{l}\textit{Geschwindigkeit bzgl. des}\\ \textit{Bodens bei Rückenwind}\end{array} = \begin{array}{l}\textit{Eigengeschwindigkeit}\\ \textit{des Flugzeuges}\end{array} + \textit{Windgeschwindigkeit}$$

$$\begin{array}{l}\textit{Geschwindigkeit bzgl. des}\\ \textit{Bodens bei Gegenwind}\end{array} = \begin{array}{l}\textit{Eigengeschwindigkeit}\\ \textit{des Flugzeuges}\end{array} - \textit{Windgeschwindigkeit}$$

Bestimme die Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges unter der Annahme, dass die Eigen- und die Windgeschwindigkeit auf dem Hin- und dem Rückflug konstant und gleich sind.

Aufgabe 28

Bestimme die Werte für a, für die das LGS genau eine Lösung hat. Begründe!

$$\begin{array}{rl} & x - a\,y = 4 \\ \wedge & 2x + 4y = 0 \end{array}$$

Aufgabe 29

Zwei Teesorten kosten 10,50 € (Sorte 1) bzw. 13,50 € (Sorte 2) pro 250 g.
Bestimme, wie viel Gramm jeder Sorte man für eine 250 g-Packung zusammenmischen muss, die 12,50 € kosten soll.

Calimero

Calimero

Calimero

Calimero

Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die an der Erstellung der Materialien beteiligt sind

Name	Vorname	Dienststelle
Borggreve	Peter	Gymnasium Syke
Breidert	Lutz	Gymnasium Himmelsthür
Dierks	Andreas	Gymnasium Himmelsthür
Glaser	Torsten	Niedersächsisches Kultusministerium
Hagen	Marten	Gymnasium Papenburg
Körner	Henning	Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien Oldenburg
Kramer	Olaf	Gymnasium Syke
Kronabel	Edmund	Gymnasium Papenburg
Krüger	Ulf-Hermann	Gymnasium Syke
Lampe	Hans-Ulrich	Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien Stadthagen
Pinkernell	Guido	Technische Universität Darmstadt
Röhrkasten	Cornelia	Gymnasium Hankensbüttel
Rolfes	Rainer	Gymnasium Papenburg
Schlichting	Folkert	Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien Göttingen
Sperlich	Thomas	Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien Hildesheim
Stenten-Langenbach	Hans-Dieter	Gymnasium Marianum Meppen
Stöber	Torsten	Gymnasium Johanneum Lüneburg
Suhr	Friedrich	Gymnasium Johanneum Lüneburg
Toth-Hohmann	Anja	Gymnasium Hankensbüttel
Vehling	Reimund	Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien Hannover II
Weißmann	Karin	Gymnasium Hankensbüttel
Wierzyk	Barbara	Gymnasium Johanneum Lüneburg

CAliMERO

Computer-Algebra im Mathematikunterricht: Entdecken, Rechnen, Organisieren

METHODISCHE UND DIDAKTISCHE HANDREICHNUNG
BAND 4

Kontakt:

T^3 DEUTSCHLAND

www.t3deutschland.de

Kooperationspartner:

Texas Instruments

education.ti.com/deutschland

www.calimero.com

CL2009CALBOOK4
XX/SL/1E5/JM
ISBN 978-3-934064-81-2